DX時代の計算機援用構造力学

- 断面変形梁理論 —変位場を仮定しない一般化梁の定式化
- 有限要素モデルの影響線解析

東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻
斉木 功
collabolated with
構造強度学研究室 現役・OBのみなさん

断面変形梁理論

— 変位場を仮定しない一般化梁の定式化 —

せん断変形のない梁理論(18世紀)

断面平面保持 + 断面は軸線と直角　仮定（ansatz）

経験則に基づく推測

変位場

$$u(x,z) = u(x) + z\,\theta(x) \qquad w(x,z) = w(x)$$

中立軸からの距離×断面の回転

$$\theta(x) = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

断面の回転 ＝ 軸線の傾き

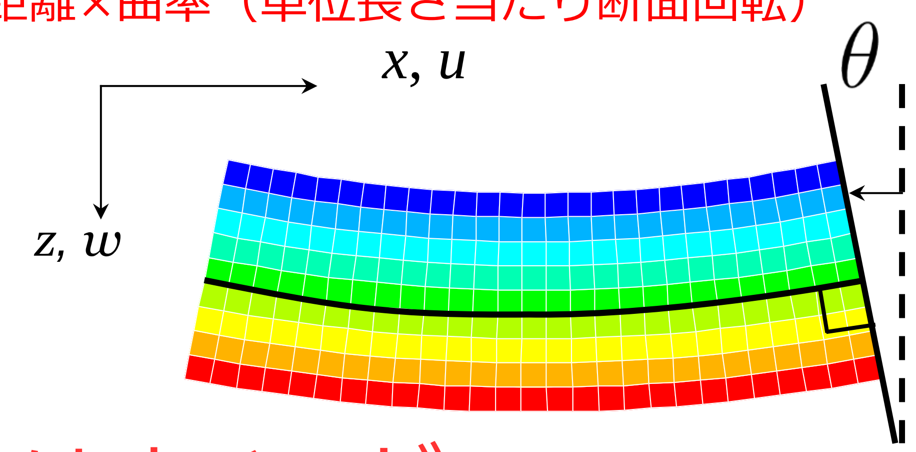
ひずみ場

中立軸からの距離×曲率（単位長さ当たり断面回転）

軸ひずみ

$$\epsilon_{11}(x,z) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + z\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

$$\epsilon_{13}(x,z) = \cdots = 0$$



軸ひずみ以外のひずみはすべてゼロ

せん断変形のない梁理論

断面平面保持 ＋ 断面は軸線と直角　仮定（ansatz）

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \text{symm.} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

偏微分

$$= \begin{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - y\,\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

常微分

<u>細長い梁ではよい近似</u>

細長くなくなると 断面は軸線と直角 でなくなる…

せん断変形する梁理論(20世紀)

断面平面保持の仮定　~~断面は軸線と直角~~

変位場

$$u(x,z) = u(x) + z\,\theta(x) \qquad w(x,z) = w(x)$$

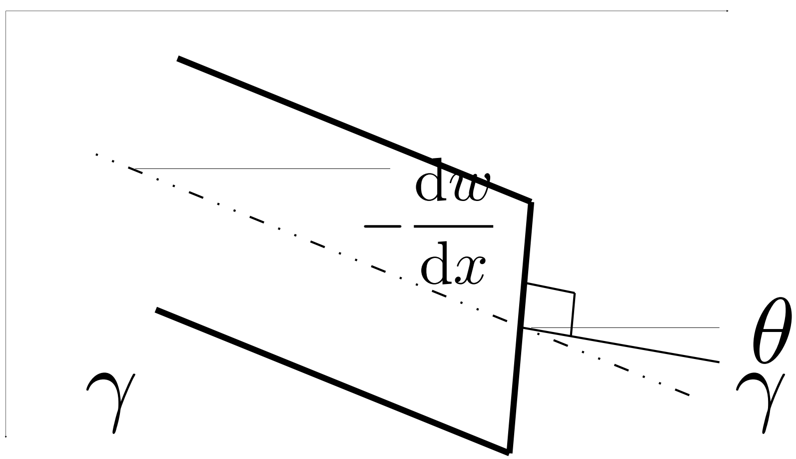
$$\theta(x) = \underline{\gamma(x)} - \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

断面の回転 ＝ せん断変形 ＋ 軸線の傾き

ひずみ場

$$\epsilon_{11}(x,z) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + z\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

$$\epsilon_{13}(x,z) = \frac{\gamma(x)}{2}$$



断面内一定
(1次せん断理論)

せん断変形する梁理論(20世紀)

断面平面保持の仮定　~~断面は軸線と直角~~

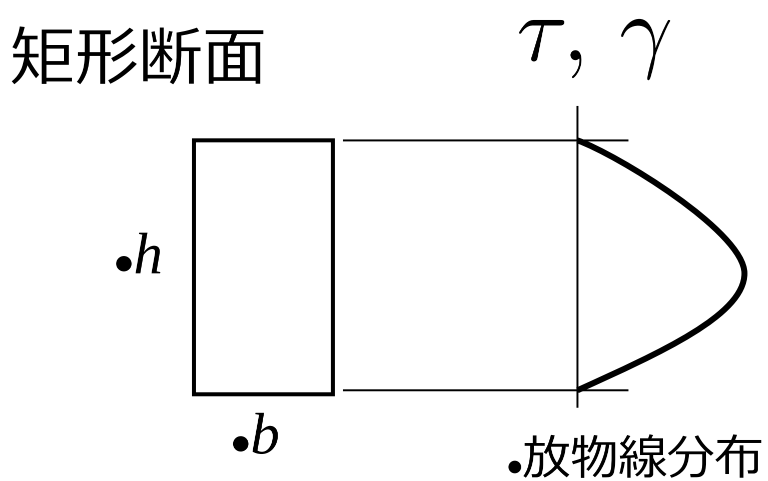
ひずみ場

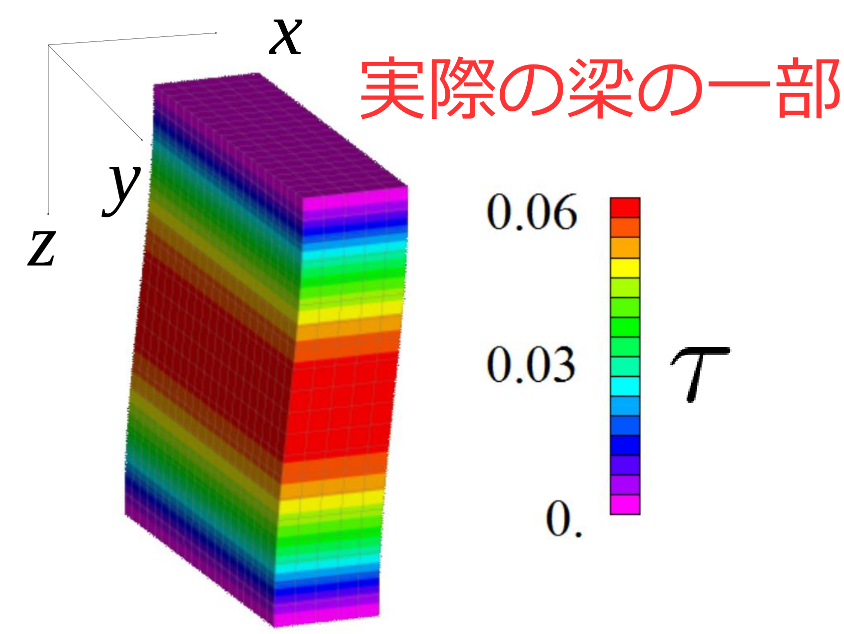
$$\epsilon_{11}(x,z) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + z\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \qquad \epsilon_{13}(x,z) = \frac{\gamma(x)}{2}$$

断面内一定

他のひずみ成分はゼロ

実際は





面外せん断応力は表面でゼロ→せん断応力，ひずみは一定ではない

せん断変形する梁理論(20世紀)

断面平面保持の仮定　~~断面は軸線と直角~~

ひずみ場

$$\epsilon_{11}(x,z) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + z\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \qquad \epsilon_{13}(x,z) = \frac{\gamma(x)}{2}$$

他のひずみ成分はゼロ　　断面内一定

箱形梁のせん断遅れ変形

実際は

- 薄肉断面ではフランジがせん断遅れ変形
- 軸変位 u は y (橋軸直角)方向に一定ではない.

無視されるPoisson効果

断面平面保持の仮定

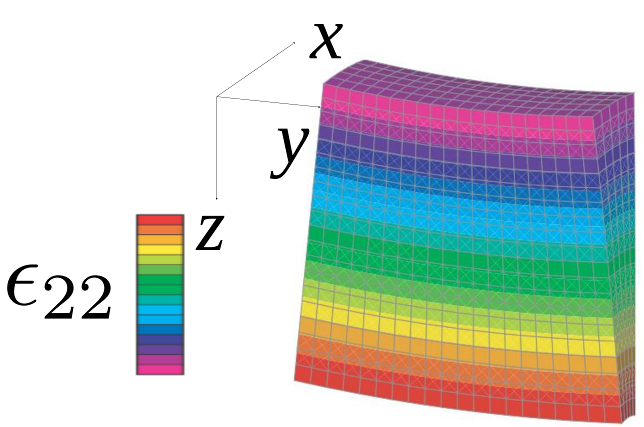
~~断面は軸線と直角~~

応力場 cf. 平面応力

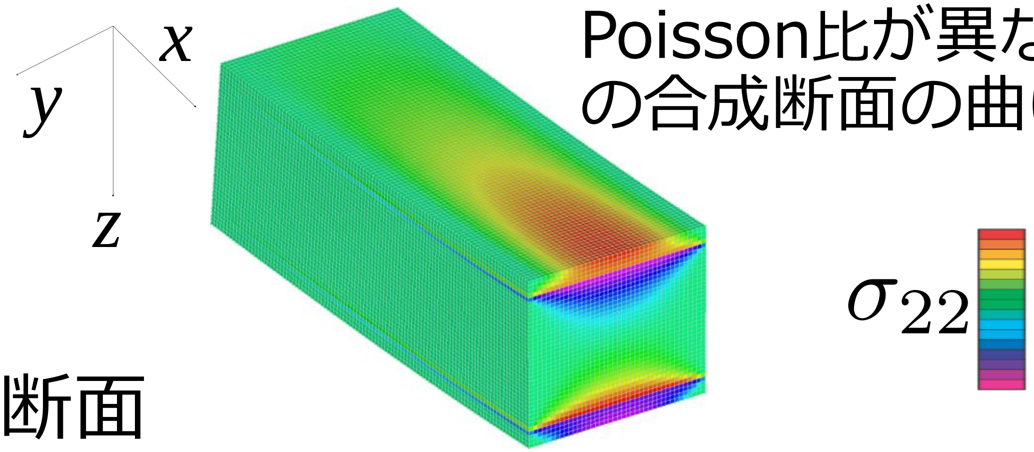
$$\sigma_{22}(x,z)=0$$
$$\sigma_{33}(x,z)=0$$

$$\epsilon_{22}(x,z)=-\nu\sigma_{11}/E$$
$$\epsilon_{33}(x,z)=-\nu\sigma_{11}/E$$

- 合成（非均質）断面では必ずしも満たされない.
- v, w一定の変位場と矛盾するが無視される.



曲げを受ける矩形断面



Poisson比が異なる材料の合成断面の曲げ変形

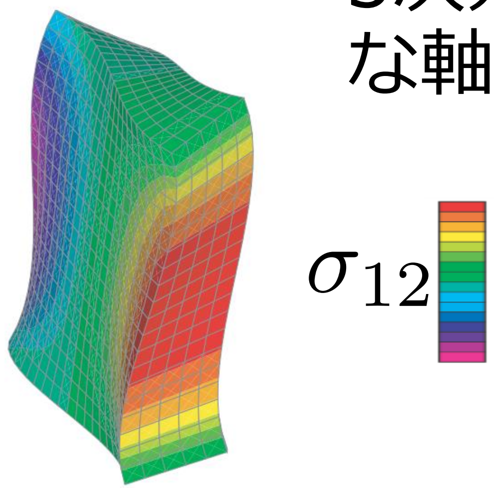
ねじりによる断面変形

~~断面平面保持の仮定~~ $w(x,z) = y\,\psi(x)$

実際は

3次元梁ではねじれによる非一様な軸方向変位u（そり）も生じる

ねじりを受ける矩形断面の変形とせん断応力



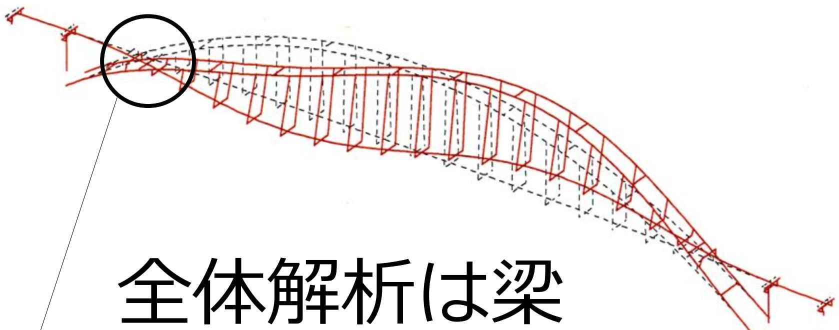
ここまでのまとめ

一般的に断面は平面を保持できず，鋼橋のように薄肉であったり，細長くない場合その影響は無視できない

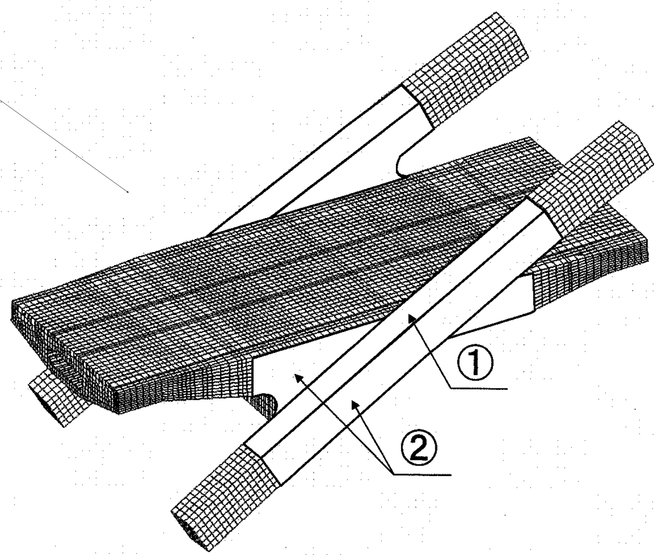
（有効幅やせん断補正係数による対処療法）

梁と連続体（含む平面シェル）

とあるアーチ橋

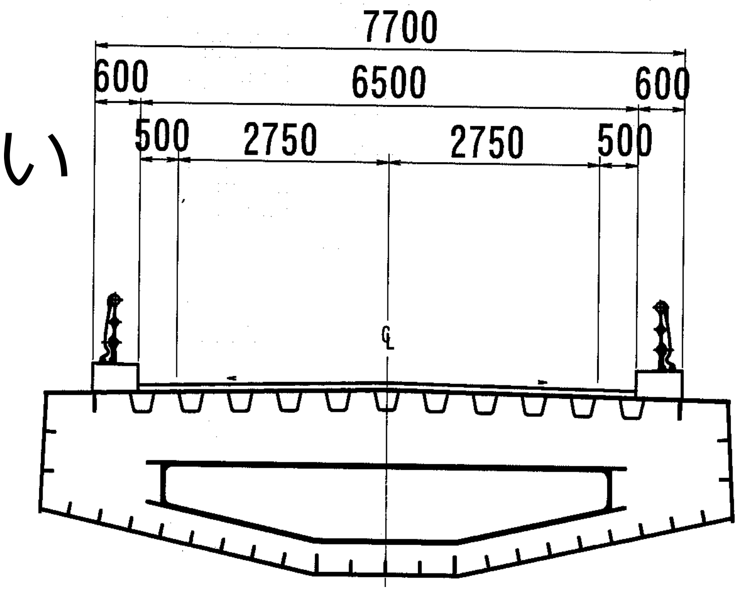


全体解析は梁



部分解析はシェル

細長くない
補剛桁



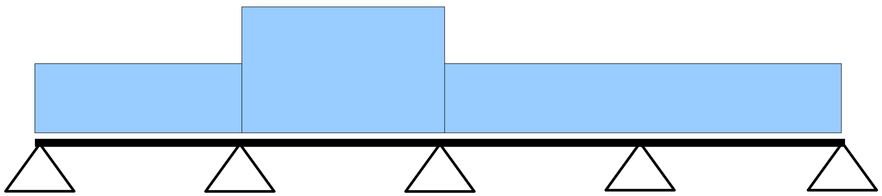
8m幅
15mピッチで支持

motivation 1

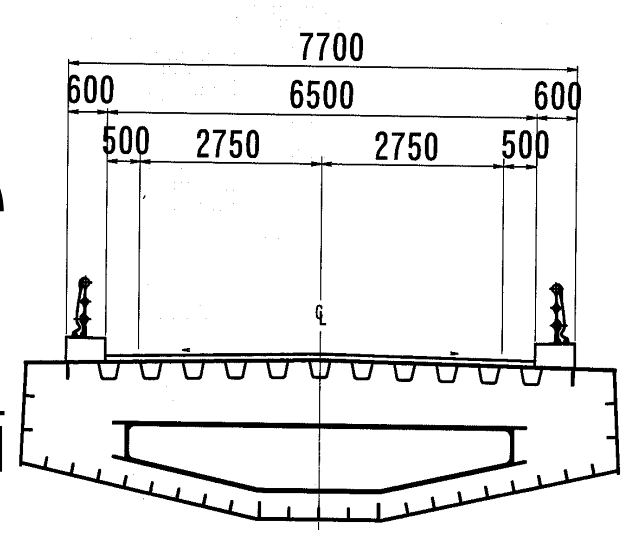
梁（骨組）要素と連続体要素
のコストの<u>差が大きすぎる</u>

梁と連続体（含む平面シェル）

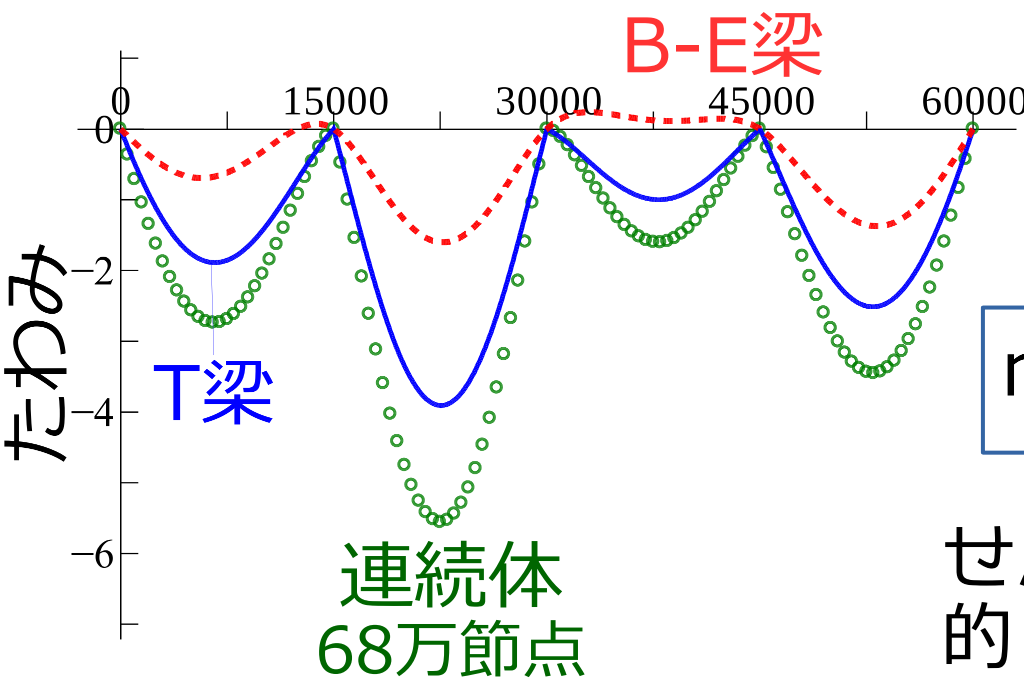
補剛桁の一部



15mピッチで支持



細長くない補剛桁(幅約8m)を単純な箱形に変換

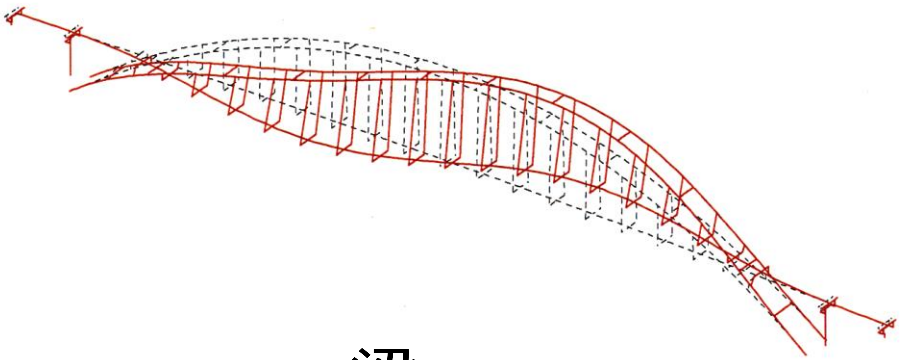


motivation 1′

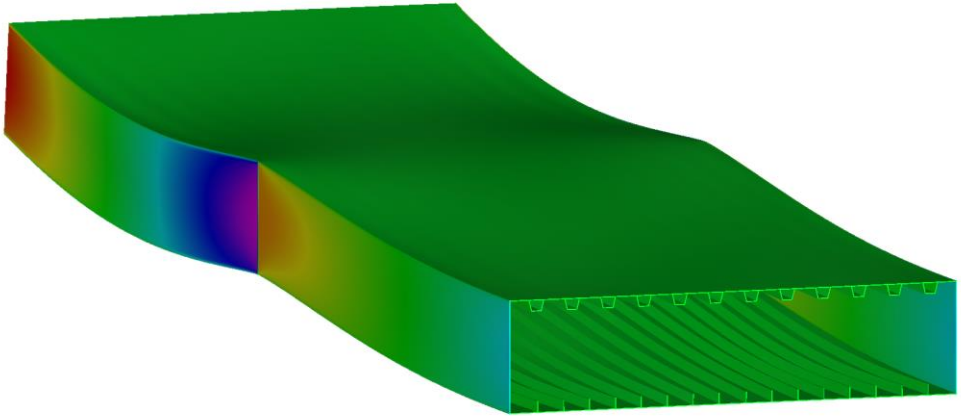
せん断変形しない(B-E)梁は定性的にも正しくない．せん断変形する(T)梁でもまだ誤差が大きい．

設計のツールとして考える

どちらでも照査はできるが．．．



梁



シェル

曲げ剛性や断面係数，せん断剛性などの力学的特性

板厚と形状のみ

motivation 2

照査ではなく設計を考えるとあたりを付けやすい梁は不可欠

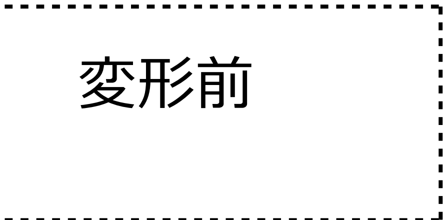
研究の目的

- 各種の断面変形を考慮した現代的な梁理論を構築し，古典的梁理論と3次元有限要素法とのギャップを埋めたい
    - 任意断面（含む非均質）に適用可能
    - 有限要素解析技術を援用

⇒ 横せん断による断面変形を考慮した梁理論

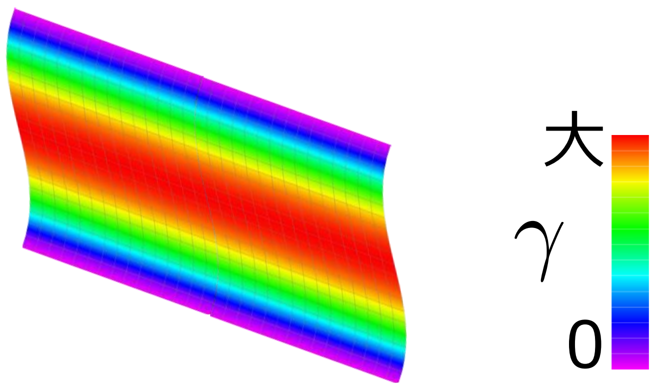
Timoshenko梁とせん断補正係数

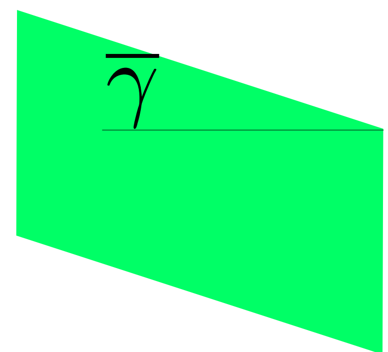
せん断補正係数κ



Timoshenko梁（せん断ひずみが一定）と
実際の梁（せん断ひずみは一定ではない）
のギャップを補正するための係数

変形後





実際のせん断変形と
せん断ひずみ分布

Timoshenko梁の変形
（せん断ひずみ一定）

$$Q = \int_A G\gamma \,\mathrm{d}A$$

$$Q = G\overline{\gamma}A\boxed{\kappa}$$

Q :せん断力，G :せん断弾性係数，κ：せん断補正係数

単純な形の断面に対してのみ公式化されている

せん断遅れの解析的方法

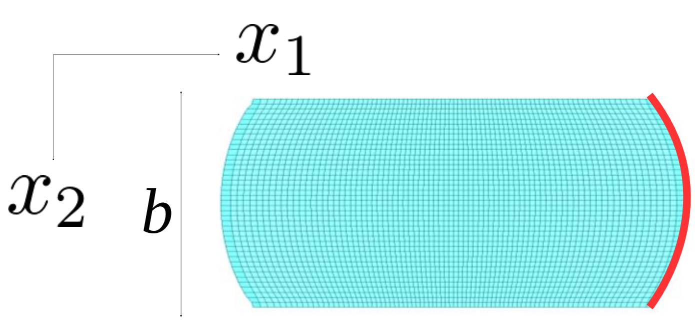
- Reissner(1946)

箱断面フランジの軸方向変位場

せん断遅れの程度の橋軸方向分布

$$u_1 = h\left(-\frac{\mathrm{d}u_3(x_1)}{\mathrm{d}x_1} + \left(1-\left(\frac{x_2}{b}\right)^2\right)g(x_1)\right)$$

高さ　　たわみ角　　せん断遅れ



フランジの軸方向変位の幅方向分布形（せん断遅れモード）

箱形のような単純な断面には有効だが，複雑な形状の断面や複合断面にも適用したい

せん断遅れの解析的方法

- Reissner(1946)

箱断面フランジの軸方向変位場

せん断遅れ

$$u_1 = h\left(-\frac{\mathrm{d}u_3(x_1)}{\mathrm{d}x_1} + \left(1 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2\right) g(x_1)\right)$$

高さ　たわみ角　軸方向変位の幅方向分布　せん断遅れ変位

- 斉木・鄭(2021)

$$u_1 = x_3\theta + f(x_2, x_3) g(x_1)$$

断面変形モード　断面変形変位

せん断遅れの変位と横せん断の変位のモード統合した断面全体の変形モード f を導入

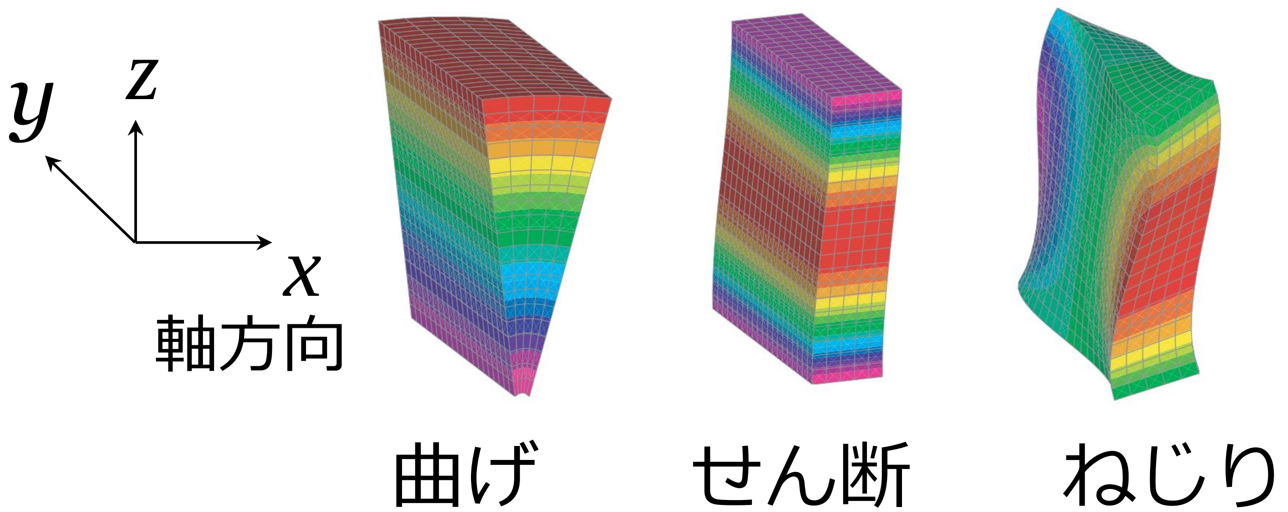
せん断遅れモードの求め方

$$u_1 = x_3\theta + f(x_2, x_3)g(x_1)$$

- 要素試験で求められればよい.
- 実験はできないので，有限要素解析を使う.
- 境界条件が自明ではない.

- 均質化理論による梁の代表体積要素

梁理論に適用した均質化理論



軸方向に周期的な境界条件を用いて梁（の代表体積要素）に曲げ・せん断などの変形を与える

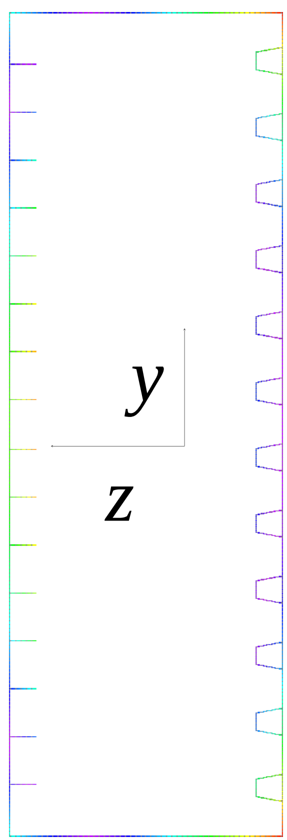
梁の各基本変形（曲げ・せん断など）に対する変位場が仮定なしに数値的に得られる.

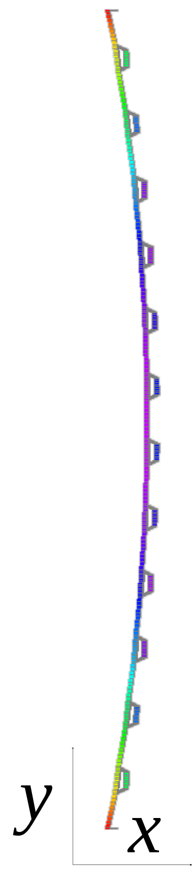
非均質や任意形状の梁の平均的な曲げ剛性やせん断剛性が数値的に得られる.

代表体積要素によるせん断遅れモード

$$u_1 = x_3\theta + f(x_2, x_3)g(x_1)$$

代表体積要素（ミクロ）





上フランジの変形

- 均質化理論による梁の代表体積要素

断面変形を考慮した梁理論(支配方程式)[19]

$$u_1 = x_3\theta + f(x_2, x_3)g(x_1)$$

せん断力のつり合い

$$Q' + q = 0 \qquad Q = GA\gamma - R_3 g$$

曲げモーメントのつり合い

$$M' - Q = 0 \qquad M = EI\theta'$$

断面変形に関する一般化力のつり合い

$$-D' + R_3(g - \gamma) = 0 \qquad D = R_2 g'$$

R_2, R_3：断面変形に関するパラメタ cf. EI

せん断遅れパラメタの物理的解釈

せん断力

$$Q = GA\gamma - R_3 g$$

断面変形によるせん断力の減少分

$$R_3 \coloneqq \int_A G\left\{\left(f_{,2}\right)^2 + \left(f_{,3}\right)^2\right\} \mathrm{d}A$$

大きいほど断面変形の影響が大きい

断面変形に関する一般化力

$$D = R_2 g'$$

$$R_2 \coloneqq \int_A E f^2 \mathrm{d}A$$

断面変形の剛性 cf. EI

$(\cdot),i = \dfrac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$ は面内方向の偏導関数, $(\cdot)' = \dfrac{\mathrm{d}(\cdot)}{\mathrm{d}x_1}$ は軸方向に関する導関数

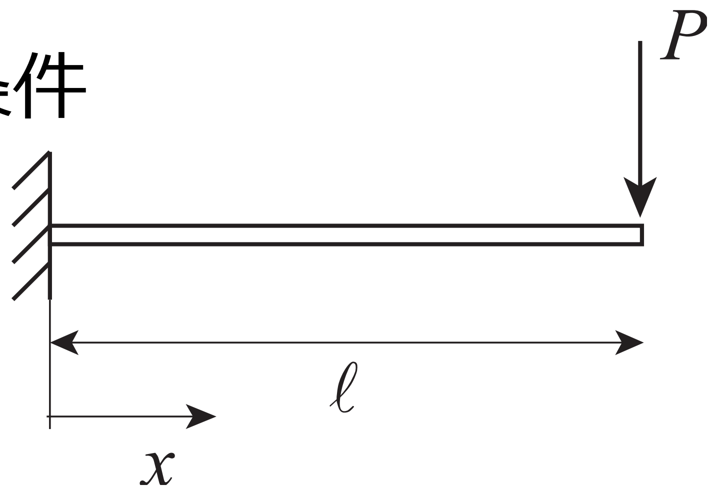
断面変形を考慮した梁理論(境界値問題)[21]

$$Q' + q = 0 \qquad Q = GA\gamma - R_3 g$$

$$M' - Q = 0 \qquad M = EI\theta'$$

$$-D' + R_3(g - \gamma) = 0 \qquad D = R_2 g'$$

片持ち梁の境界条件



$$u_3 = 0$$
$$\theta = 0$$
$$g = 0$$

断面変形はゼロ

$$Q = P$$
$$M = 0$$
$$D = 0$$

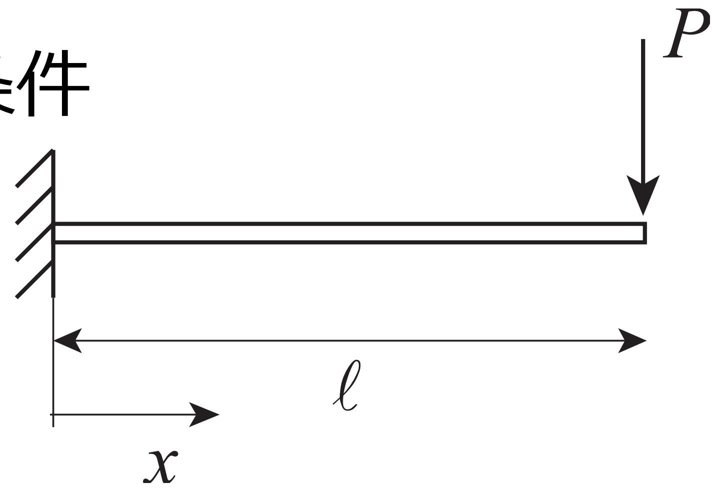
断面変形を拘束する力はゼロ

R_2, R_3：断面変形に関するパラメタ cf. EI

断面変形を考慮した梁理論(解析解)

片持ち梁の境界条件

$$u_3 = 0,\quad \theta = 0,\quad g = 0$$



$$Q = P,\quad M = 0,\quad D = 0$$

たわみ（g, γ, θも同様に）

$$u_3 = u_{3BE} + \frac{Px}{K_{\mathrm{seq}}} + \frac{PR_3\left\{\sinh\left(k(\ell - x)\right) - \sinh(k\ell)\right\}}{kGA(GA - R_3)}$$

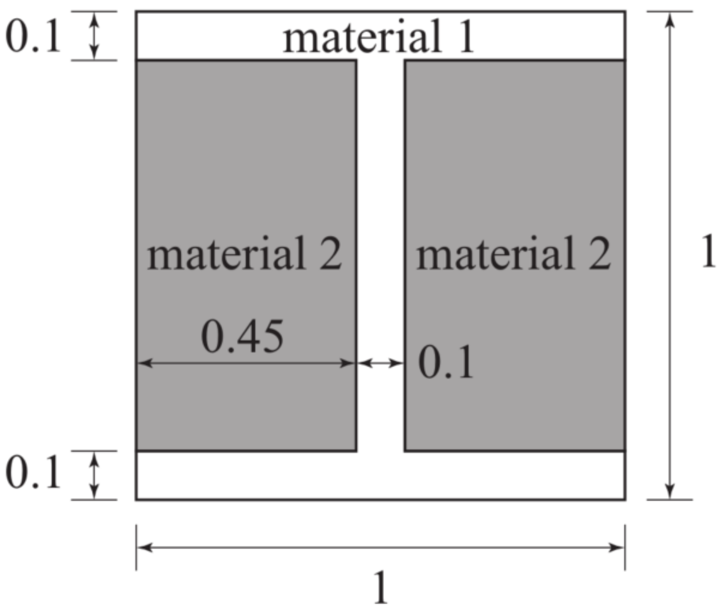
B-E梁　Timoshenko梁　せん断遅れによる影響

$$K_{\mathrm{seq}} := GA - R_3$$

$G\kappa A$に相当（せん断補正係数）

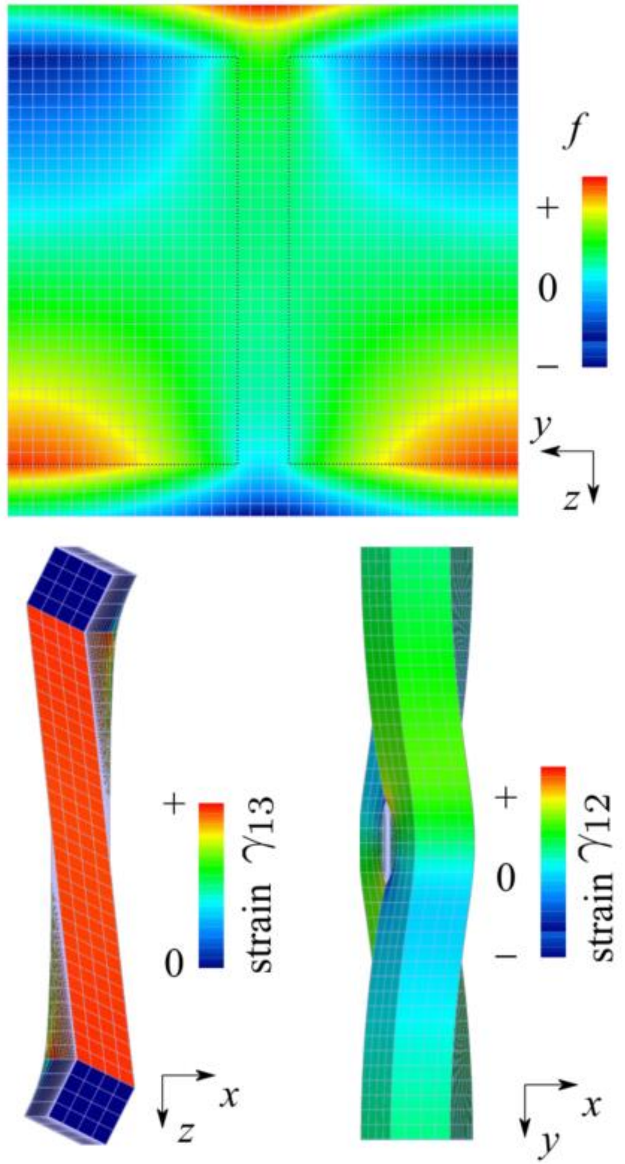
$$k^2 := \frac{R_3 K_{\mathrm{seq}}}{GAR_2}$$

非均質な梁（cf. SRC）



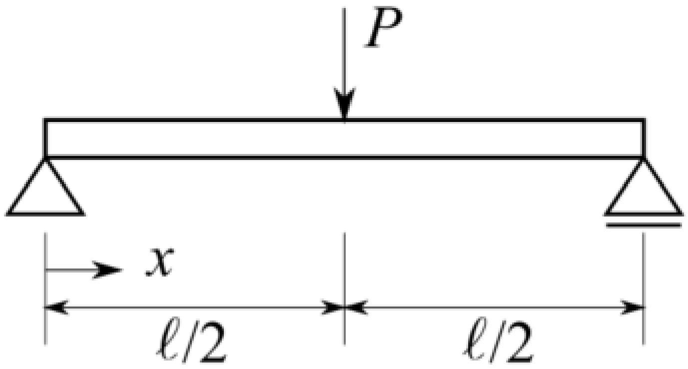
$$E_1 = E_2 \times 10^3$$

フランジ以外の断面変形も数値的に得られる

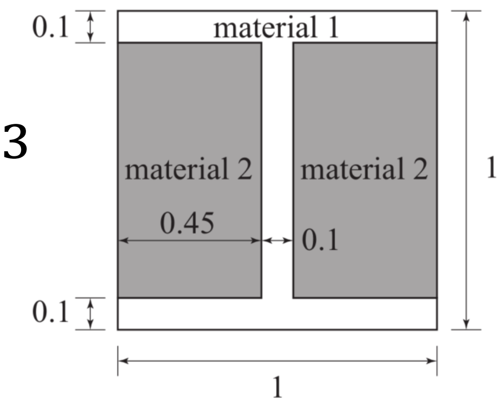


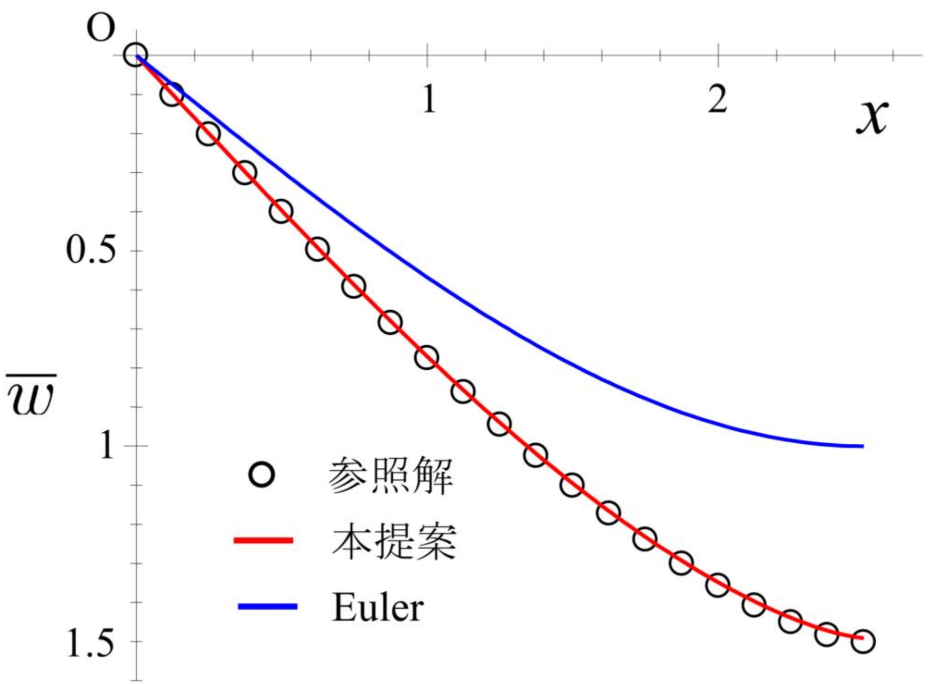
せん断変形に伴う断面変形の様子

非均質な梁（cf. SRC）

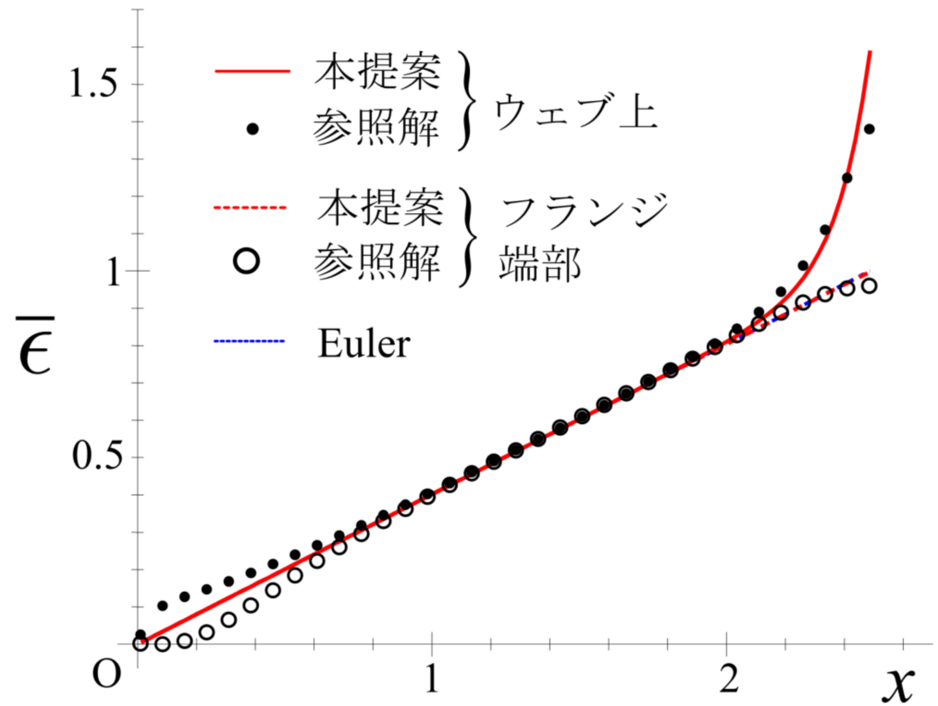


$$E_1 = E_2 \times 10^3$$





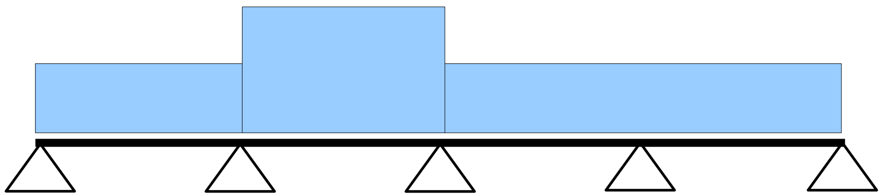
たわみ



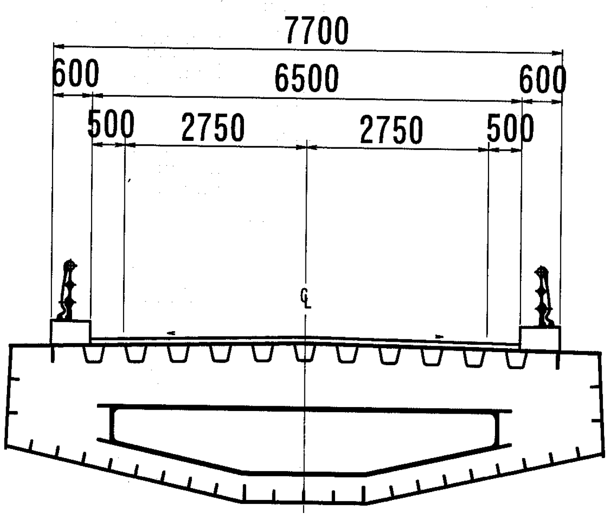
ひずみ

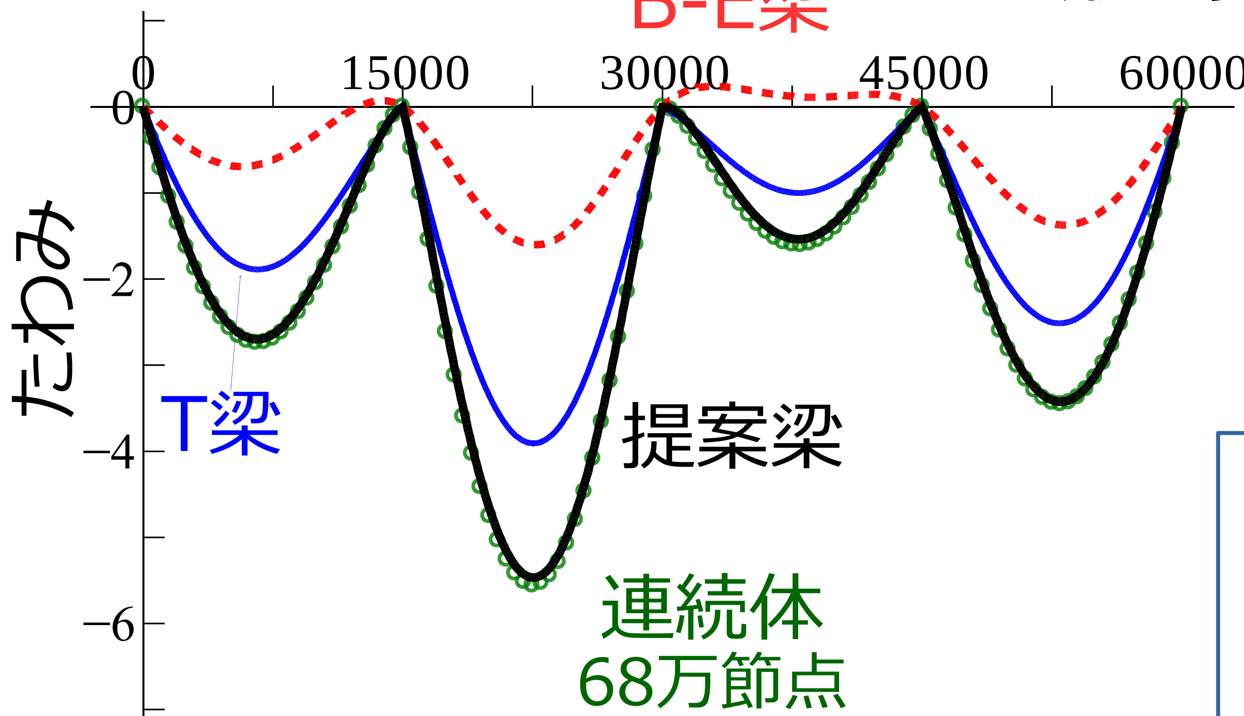
たわみもひずみも参照解をよく再現できた

幅広補剛桁の答え合わせ



細長くない補剛桁(幅約8m)を単純な箱形に変換





提案手法により梁理論の適用範囲を大幅に広めることができた．

まとめ

- 均質化理論に基づいた代表体積要素の数値解析により，統一的に断面変形を考慮できる梁理論を提案した.
- 提案手法では断面変形を考慮するために変数(g)を一つ追加するだけでよい.（断面パラメタは代表体積要素（数値的な要素試験）で決定する）
- 提案した梁理論は，細長いとはみなせない大規模な橋梁に用いられる薄肉大断面の梁の挙動を精度良く再現できた.

斉木・鄭：せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論，土木学会論文集A2, Vol.77, No.1, pp.1-11, 2021.

関連する文献

- 須田陽平, 斉木　功,　任意断面に適用可能なねじりによる断面変形を考慮した梁理論,　土木学会論文集, Vol.80, No.15, 23-15003, 2024
- 青木洋樹, 斉木　功, 大竹　雄, 三井涼平,　せん断遅れによる付加的な応力評価のための機械学習による断面特性推定,　土木学会論文集, Vol.79, No.15, 22-15009, 2023.
- 斉木　功, 田淵　航,　Poisson 効果による断面変形を考慮した梁理論,　土木学会論文集A2, Vol.77, No.2, pp.I_59-I_68, 2021.
- 斉木　功, 鄭　勲,　せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論,　土木学会論文集A2, Vol.77, No.1, pp.1-11, 2021.
- 星屋美優, 斉木　功, 山本剛大,　断面変形を考慮した梁要素と 連続体要素の接続に関する検討,　土木学会論文集A2, Vol.76, No.2, pp.I_183-I_191, 2020.
- 斉木　功，鄭　勲，山本剛大,　断面変形を梁のせん断変形と独立に考慮した梁理論,　土木学会論文集A2, Vol.75, No.2, pp.I_3-I_12, 2019.
- 斉木　功, 藤本竜太, 山本剛大,　非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察 土木学会論文集A2, Vol.74, No.2, pp.I_3-I_11, 2018.
- 斉木　功, 西井大樹, 山本剛大,　任意断面のせん断遅れを考慮できる梁要素,　日本計算工学会論文集，Vol.2018, No.20180013, 2018.
- 斉木　功，西井大樹，岩熊哲夫,　任意断面梁のせん断遅れ解析の高精度化,　土木学会論文集A2, Vol.72, No.2, pp.I_53-I_62, 2016.
- 斉木　功，西井大樹，岩熊哲夫,　任意断面梁のせん断遅れ解析のための半解析的手法,　土木学会論文集A2, Vol.71, No.2, pp.I_11-I_18, 2015.
- 斉木　功，鑓　一彰，山田真幸，瀬戸川敦，岩熊哲夫,　非均質なTimoshenko梁の平均物性評価,　土木学会論文集A2，Vol.68, No.2, pp.I_161-I_169, 2012.

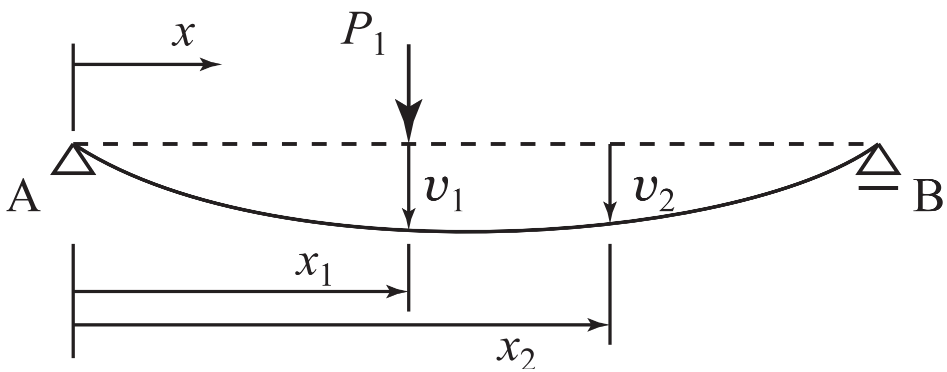
有限要素モデルの影響線

— 離散問題に対する相反定理 —

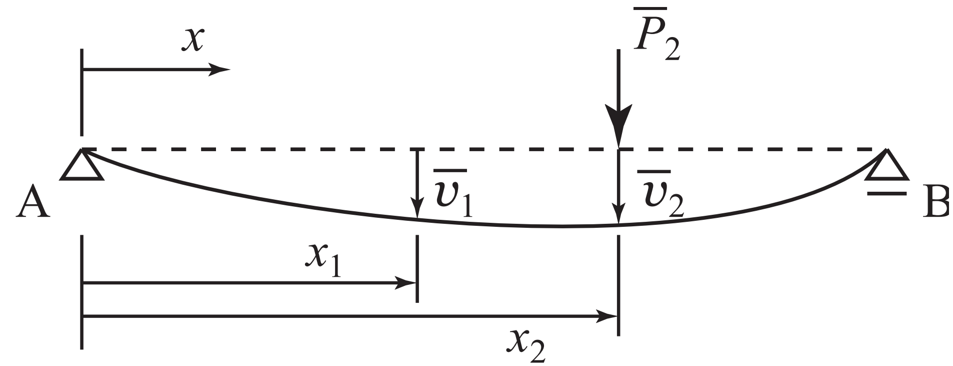
相反定理

Maxwell(1865)・Mohr(1875)
Bettiによる証明(1872)

ϕ: 曲率
M: 曲げモーメント



系1



系2

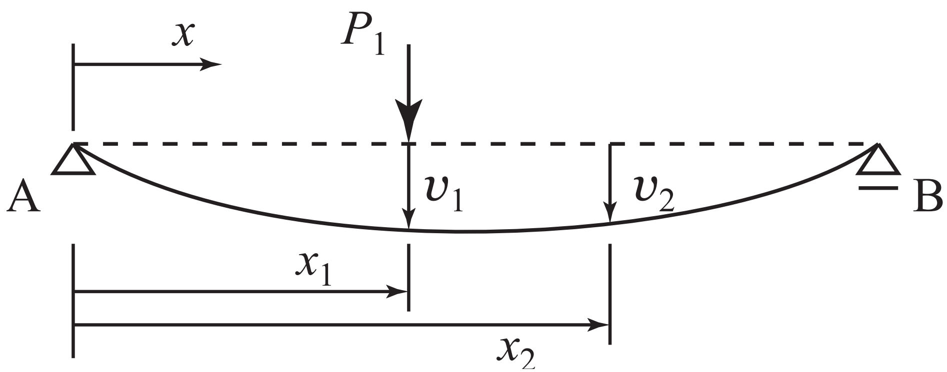
系2をつり合い系とした系1の内力補仮想仕事
= 系1をつり合い系とした系2の内力補仮想仕事

$$\int_L \phi \overline{M}\,\mathrm{d}x = \int_L \phi E\overline{\phi}\,\mathrm{d}x = \int_L M\overline{\phi}\,\mathrm{d}x$$ より外力補仮想仕事同士が等しい

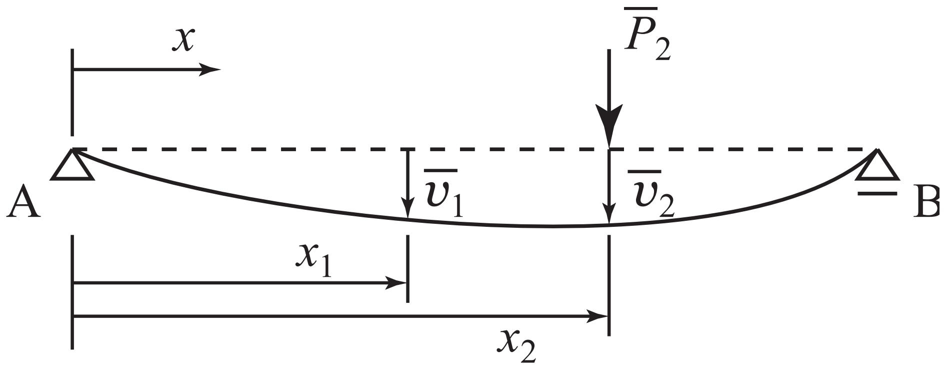
系1の変位と系2の力の積(仕事)は系2の変位と系1の力の積に等しい

相反定理

Maxwell(1865)・Mohr(1875)
Bettiによる証明(1872)



系1



系2

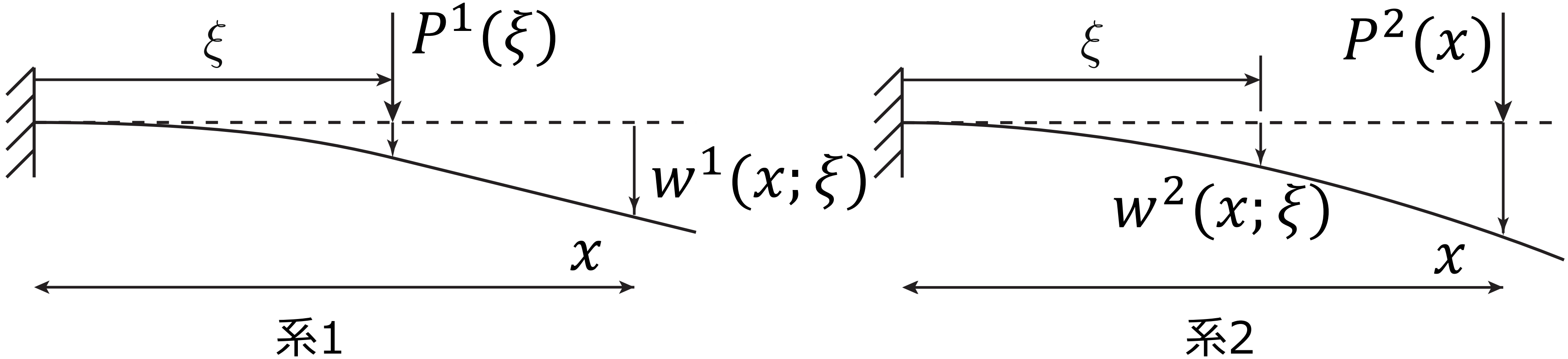
系1の変位と系2の力の積(仕事)は系2の変位と系1の力の積に等しい

$$v_2 \overline{P}_2 = \overline{v}_1 P_1$$ Bettiの相反定理

$P_1 = \overline{P}_2 = 1$ とすると $v_2 = \overline{v}_1$ Maxwellの相反定理

変位の影響線

Winkler(1868)・Müller-Breslau(1886)



系1の変位×系2の力　　系2の変位×系1の力

相反定理より $$w^1(x;\xi)P^2(x) = w^2(\xi;x)P^1(\xi)$$

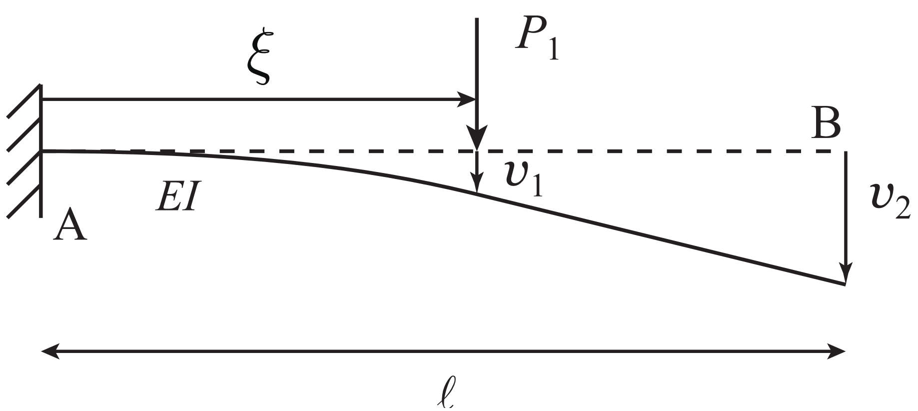
（「；」の後ろは荷重位置を表す．x: 着目点，ξ：荷重位置）

$P^1=1$とすれば，位置ξに単位荷重が作用するときの着目点xにおけるたわみ（xのたわみの影響線）は，着目点xに単位荷重が作用するときの位置ξのたわみ

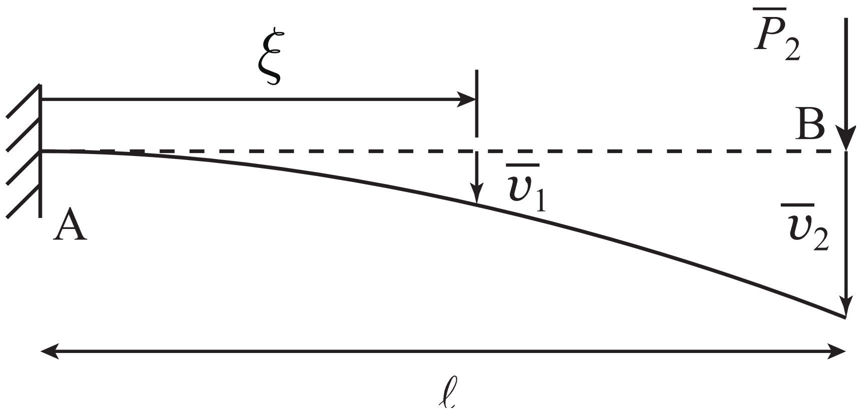
⇒ 相反定理そのもの

変位の影響線

Winkler(1868)・Müller-Breslau(1886)



系1



系2

系1変位×系2力　系2変位×系1力

相反定理より　$v_2\overline{P}_2 = \overline{v}_1 P_1$

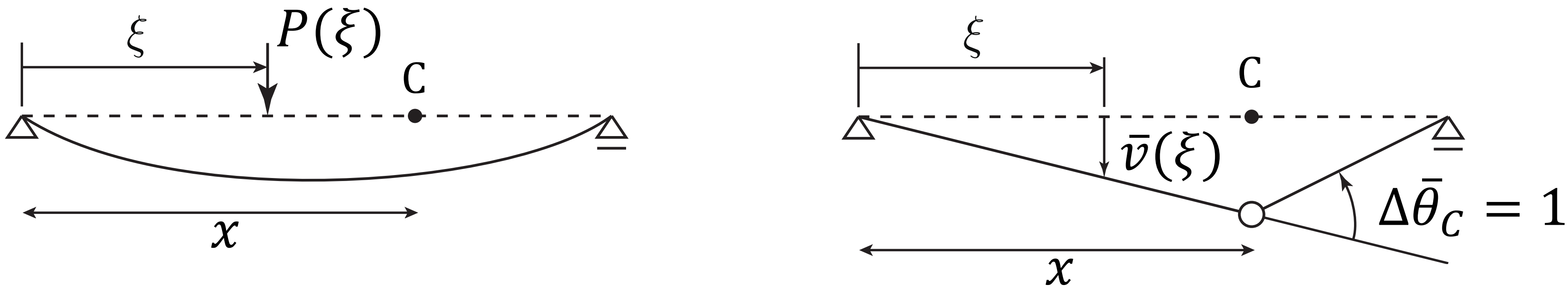
$P_1 = \overline{P}_2 = 1$とすれば，位置ξに単位荷重が作用するときのB点のたわみ（B点のたわみの影響線）は，B点に単位荷重が作用するときの位置ξのたわみ

$$v_{\mathrm{B}}(\xi) = \overline{v}(x = \xi)$$

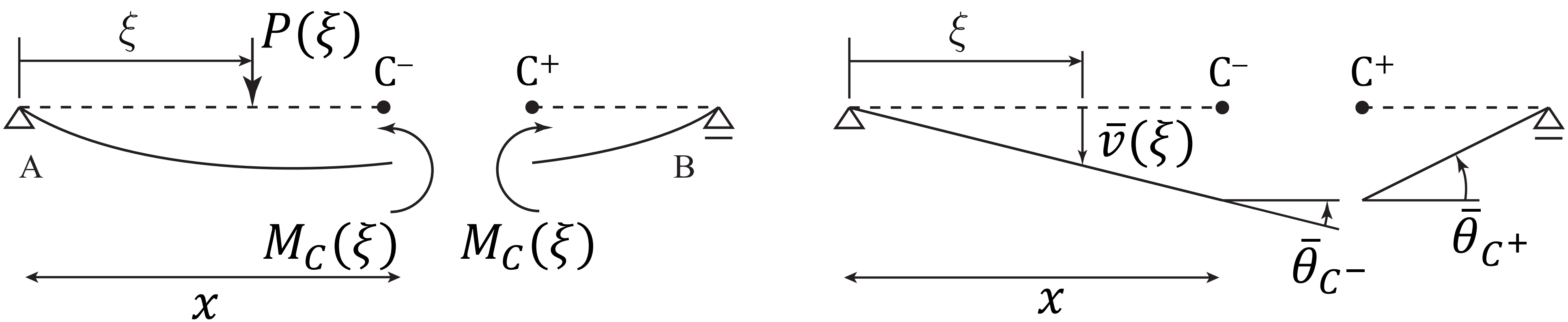
相反定理そのもの

曲げモーメント（内力）の影響線

相反定理は外力補仮想仕事同士の関係なので，内力を求めるためには工夫が必要



系1を仮想断面で分割して　　系2に不連続回転（たわみ角）を導入



系1の変位×系2の力　　系2の変位×系1の力

相反定理より　$0 = \overline{v}(\xi) \times P_1 + \overline{\theta}_{C-} \times M_C(\xi) + \overline{\theta}_{C+} \times (-M_C(\xi))$

$$\overline{\theta}_{C+} - \overline{\theta}_{C-} = \Delta\overline{\theta}_C = 1$$

$$M_C(\xi) = \overline{v}(\xi)$$

単位の不連続回転を導入した梁の形状がMの影響線

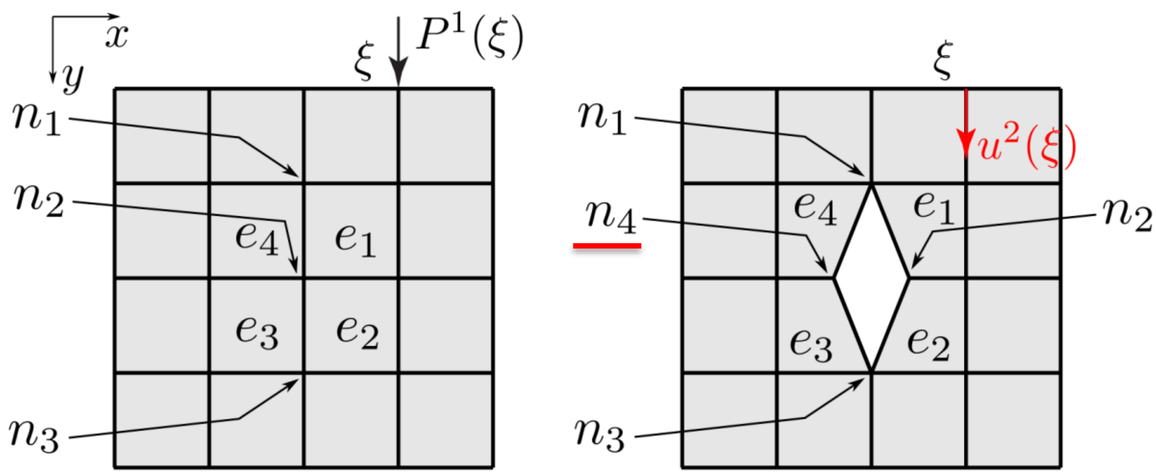
Müller-Breslauは素晴らしい，けれど

内力の影響線を相反定理で求めるために不連続変位（回転）を与えればよい！

骨組（格子）解析やシェル・ソリッド要素の解析でも利用可能

ただし，不連続変位を与えるには以下の処理が必要

- 2重節点化（同じ座標に節点を追加，要素コネクティビティを修正）
- 多点拘束(MPC)により不連続変位を導入



骨組ならまだしも，シェルやソリッドの3Dモデルではやりたくない．．．

当研究室のアイディア

内力の影響線を相反定理で求めるために不連続変位（回転）を与えればよい！

- 2重節点化（同じ座標に節点を追加，要素コネクティビティを修正）
- 多点拘束(MPC)により不連続変位を導入

骨組ならまだしも，シェルやソリッドの3Dモデルではやりたくない．．．

そこで考えました

有限要素法は変位法なので，ひずみや応力も変位と関係づけられる

変位の影響線は集中荷重を作用させたときの変位（cf.相反定理）

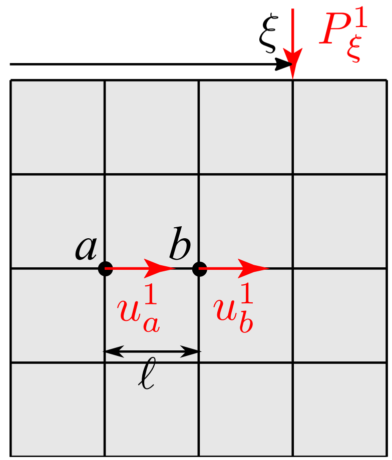
変位の影響線の重ね合わせで応力の影響線も求められるはず

応力の影響線=モデルに複数の集中荷重を作用させたときの変位

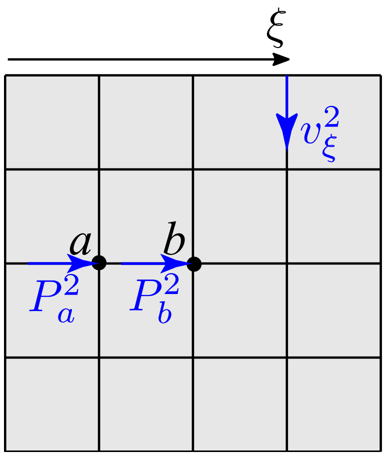
離散問題における相反定理と変位の影響線

平面要素における要素辺abのひずみの影響線

系1



系2



系1の変位×系2の力　　系2の変位×系1の力

相反定理より $u_a^1 P_a^2 + u_b^1 P_b^2 = v_\xi^2 P_\xi^1$

有限要素離散化からひずみは $(\epsilon_x)_{ab} = \dfrac{u_b^1 - u_a^1}{\ell}$

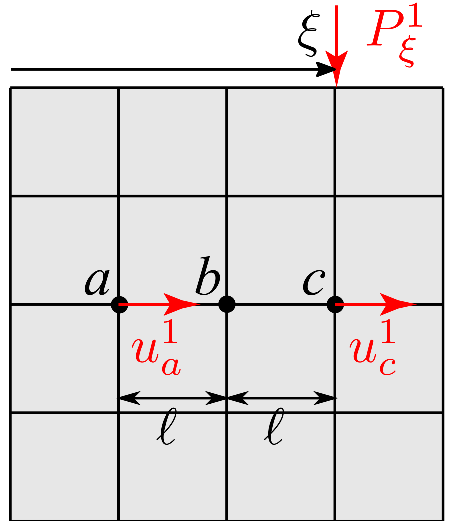
⇨ $P_a^2 = -\dfrac{1}{\ell},\quad P_b^2 = \dfrac{1}{\ell}$ とすれば $(\epsilon_x)_{ab} = \dfrac{u_b^1 - u_a^1}{\ell} = v_\xi^2$

系2の変位 v_ξ^2 が要素辺abにおけるひずみの影響線となる

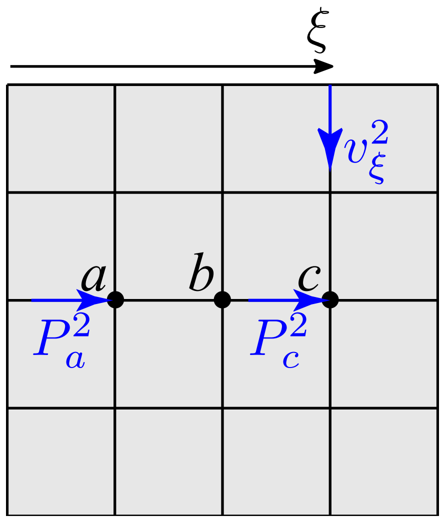
離散問題における相反定理とひずみの影響線[37]

平面要素における節点 b のひずみの影響線

系1



系2



系1の変位×系2の力　　系2の変位×系1の力

相反定理より　$u_a^1 P_a^2 + u_c^1 P_c^2 = v_\xi^2 P_\xi^1$

有限要素離散化からひずみは　$(\epsilon_x)_{ab} = \dfrac{u_c^1 - u_a^1}{2\ell}$

⇒ $P_a^2 = -\dfrac{1}{2\ell},\quad P_c^2 = \dfrac{1}{2\ell}$ とすれば $(\epsilon_x)_{ab} = \dfrac{u_c^1 - u_a^1}{2\ell} = v_\xi^2$

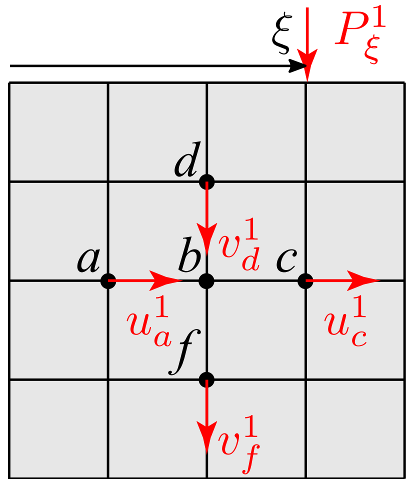
系2の変位 v_ξ^2 が節点bにおけるひずみの影響線となる

注) FEMの節点においてひずみの連続性は保証されない

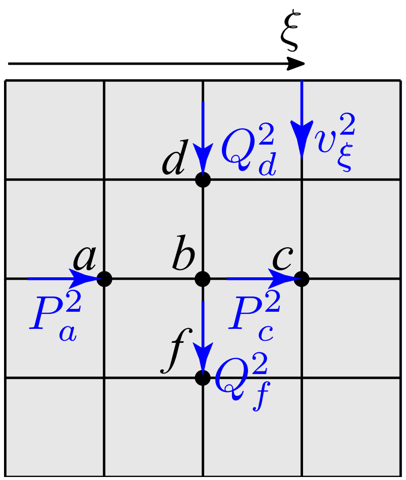
離散問題における相反定理と応力の影響線

平面応力要素における節点 b の応力の影響線

系1



系2



応力は

$$\sigma_x = \frac{E\epsilon_x}{1-\nu^2} + \frac{\nu E\epsilon_y}{1-\nu^2}$$

系1の変位×系2の力　　系2の変位×系1の力

相反定理より $u_a^1 P_a^2 + u_c^1 P_c^2 + v_d^1 Q_d^2 + v_f^1 Q_f^2 = v_\xi^2 P_\xi^1$

$$-P_a^2 = P_c^2 = \frac{E}{2\ell(1-\nu^2)}, \quad -Q_d^2 = Q_f^2 = \frac{\nu E}{2\ell(1-\nu^2)}$$ とすれば

$$\frac{u_c^1 - u_a^1}{2\ell}\frac{E}{1-\nu^2} + \frac{v_f^1 - v_d^1}{2\ell}\frac{\nu E}{1-\nu^2} = \frac{E(\epsilon_x)_b}{1-\nu^2} + \frac{\nu E(\epsilon_y)_b}{1-\nu^2} = (\sigma_x)_b = v_\xi^2$$

系2の変位 v_ξ^2 が節点bにおける応力の影響線となる

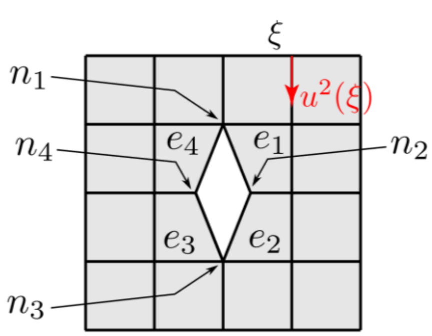
注) FEMの節点において応力の連続性は保証されない

本手法のポイント

結局Müller-Breslauと何が違うの？

Müller-Breslau

- 内力を求めるために仮想断面が必要
- 2重節点化（同じ座標に節点を追加，要素コネクティビティを修正）
- 多点拘束(MPC)により不連続変位を導入



本手法

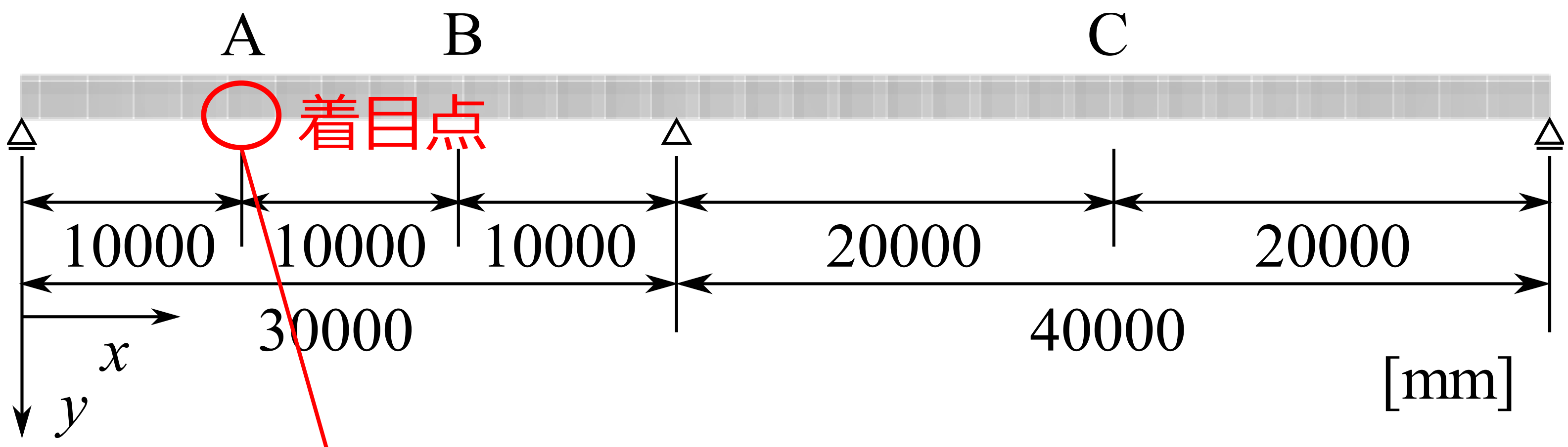
- ひずみが変位の内挿関数で表されることを利用
- モデルの修正は不要
- 着目点周辺の節点に集中荷重を与えればよい

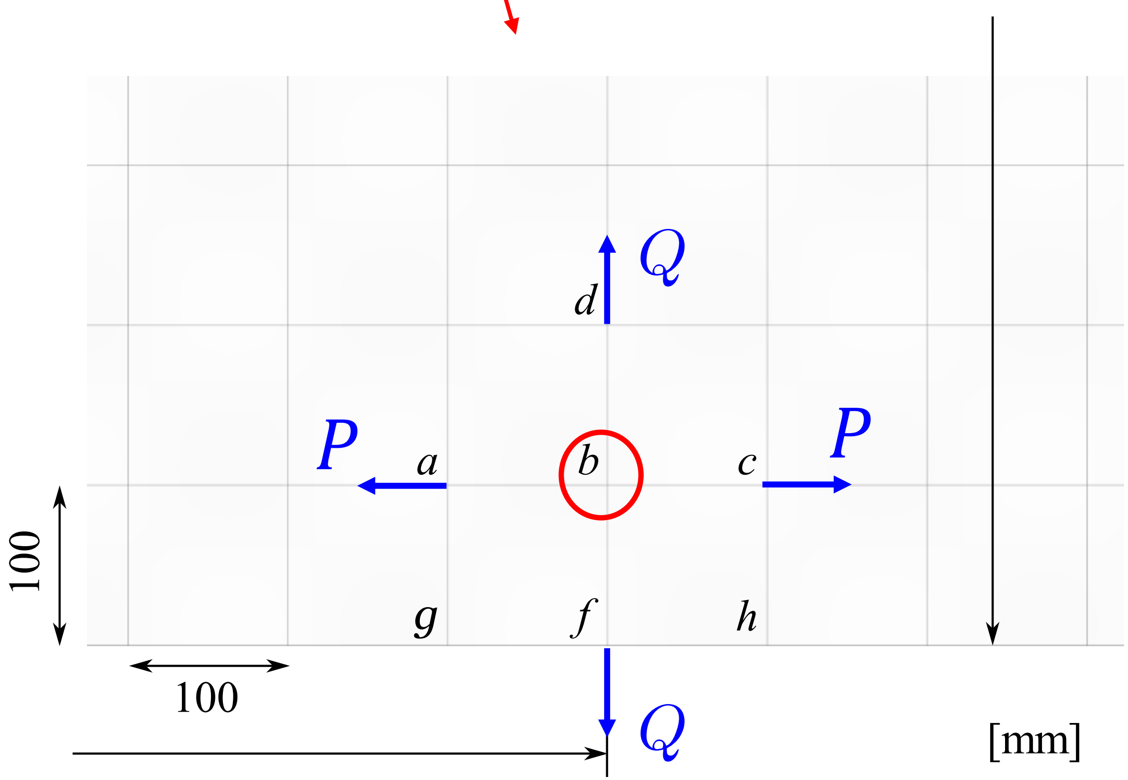
- 要素辺や節点に着目した
- そんな簡単なこと誰もやってなかったのですか？と言われることも
- 物性評価点の応力なら仕事共役のeigenひずみを導入すればよい

※ 特許7473141

2次元問題の適用例

対象構造：2径間連続梁





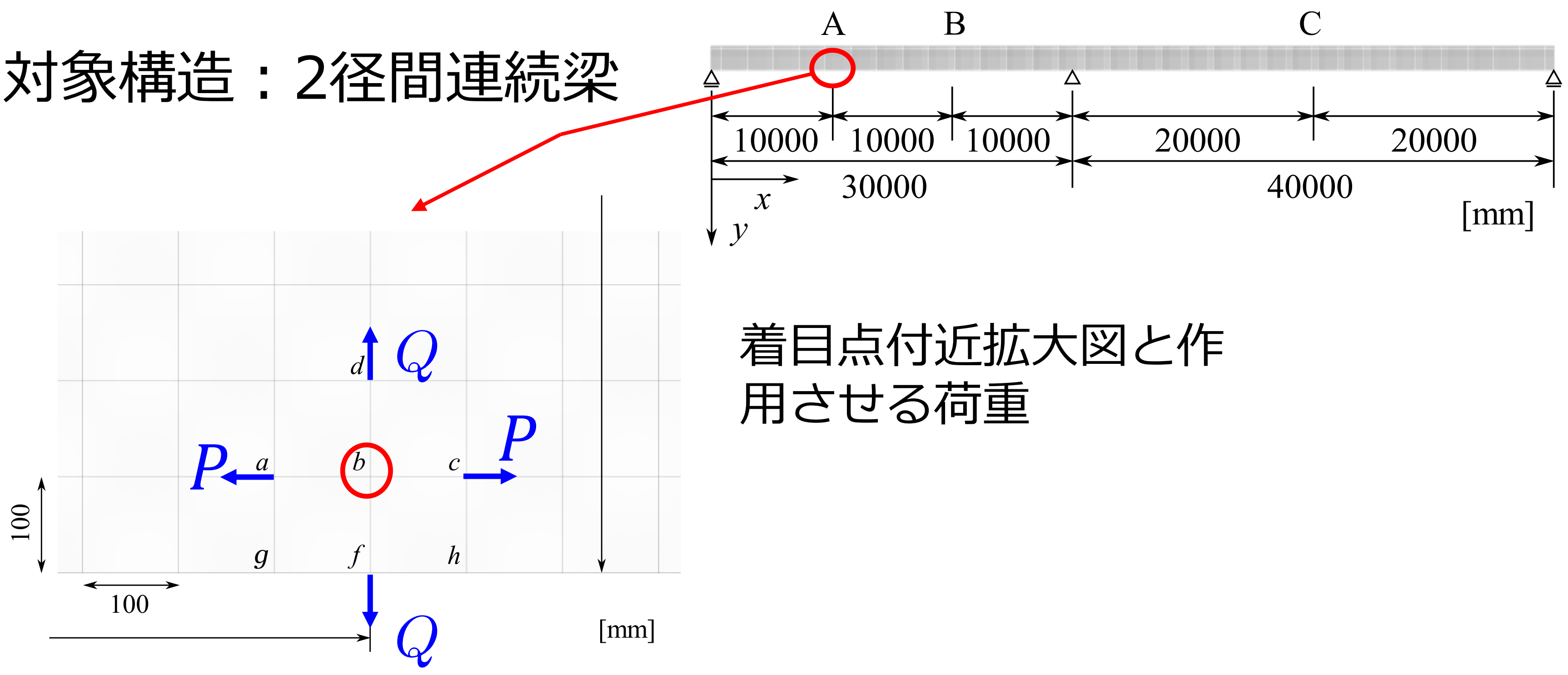
着目点付近拡大図と作用させる荷重

$$P = \frac{E}{2\ell(1-\nu^2)} = 1.1 \times 10^{12}\ \mathrm{N/m}$$

$$Q = \frac{E\nu}{2\ell(1-\nu^2)} = 3.3 \times 10^{11}\ \mathrm{N/m}$$

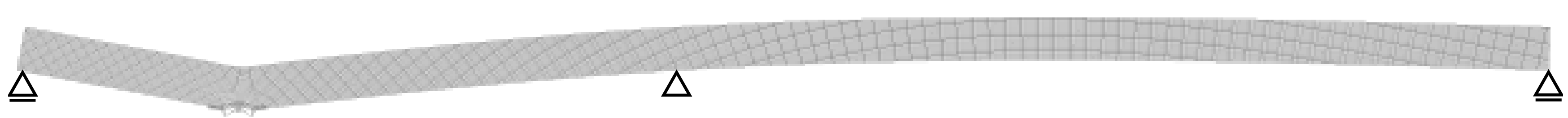
2次元問題の適用例

対象構造：2径間連続梁



着目点付近拡大図と作用させる荷重

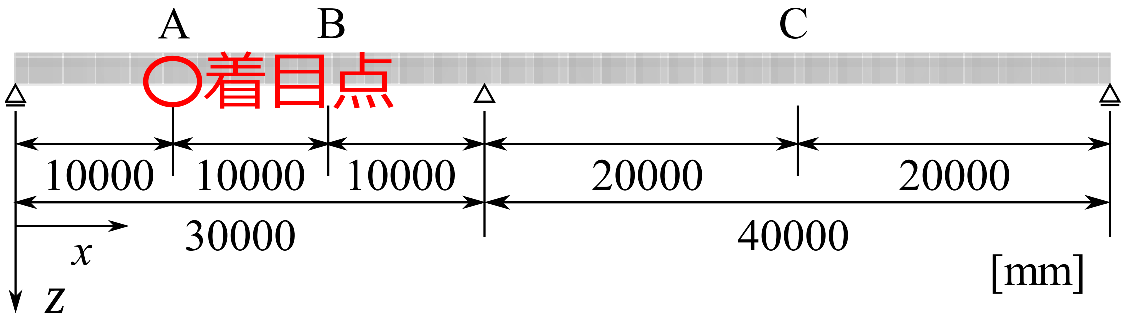
解析結果の鉛直方向変位 = 着目点の応力の影響線



- 単位荷重による応力との比較により妥当性を確認
- 単位荷重では節点数分（上縁であれば700）の解析が必要
- 本手法では着目点1つにつき1度の解析のみ必要

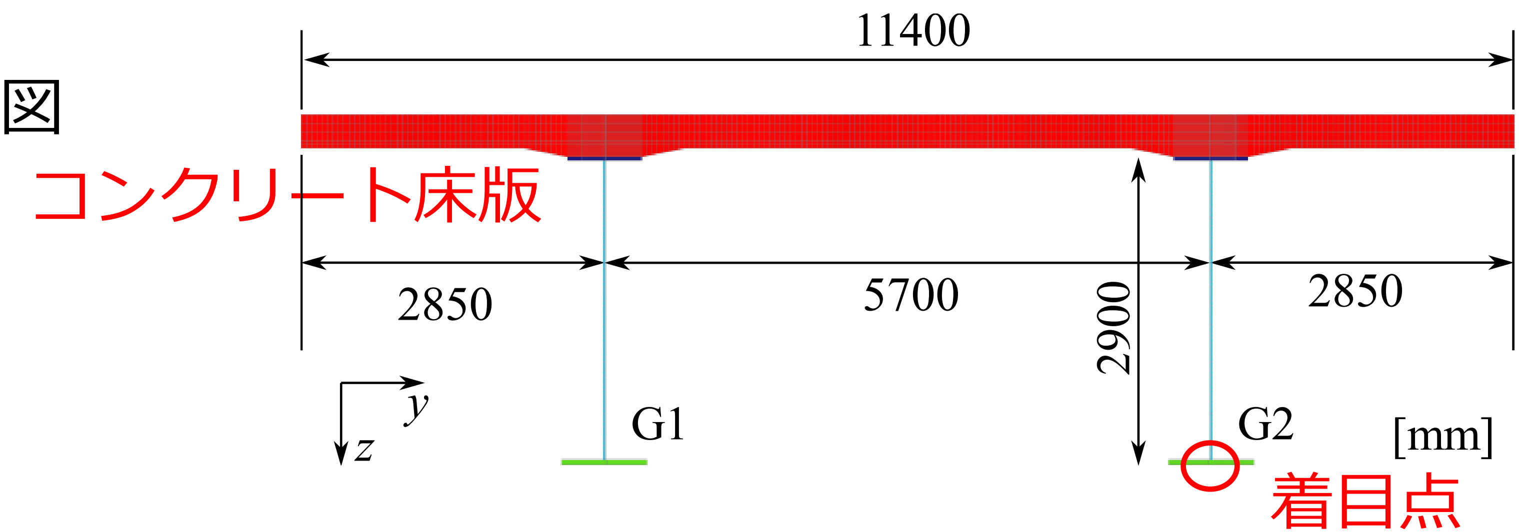
3次元問題の適用例

対象構造：



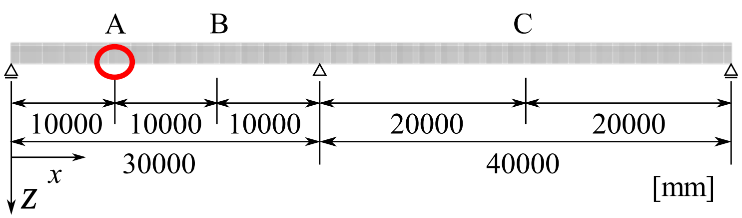
2径間連続合成桁(支間は2Dの例と同じ)

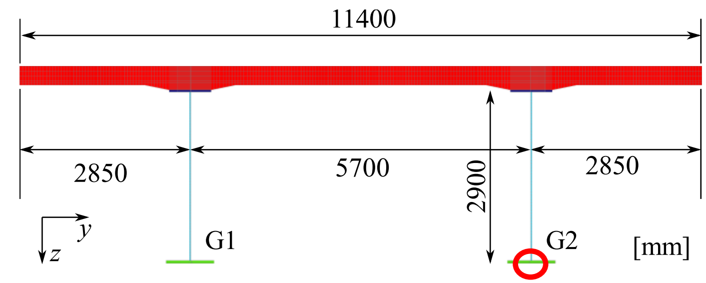
断面図



3次元問題の適用例

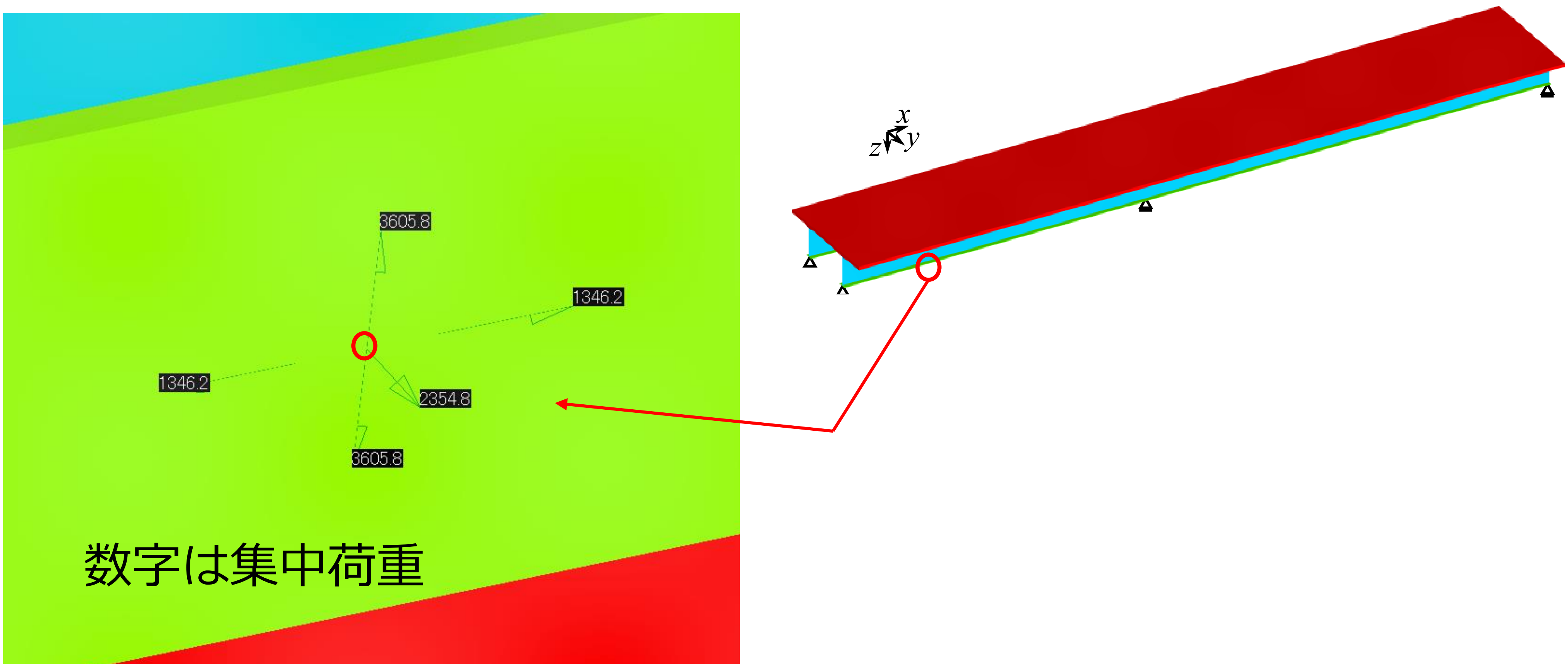
対象構造：





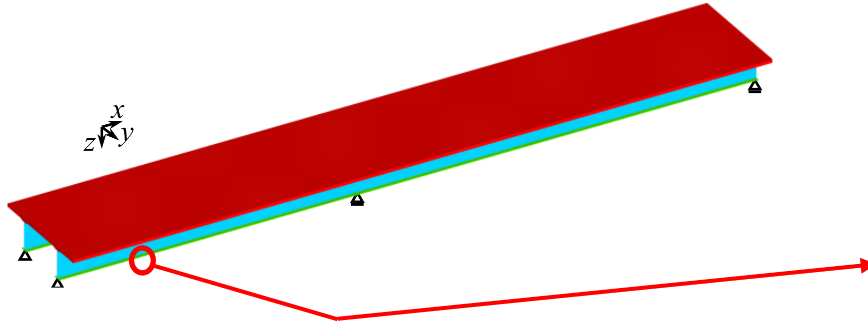
2径間連続合成桁(支間は2Dの例と同じ)　　断面図

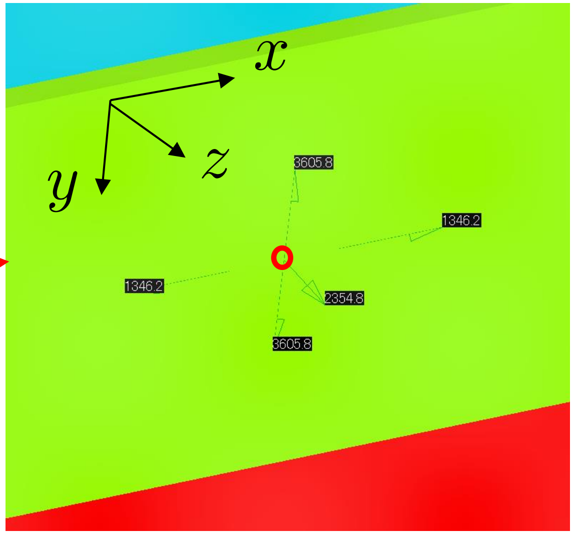
着目点（下フランジを下から見た図）



3次元問題の適用例

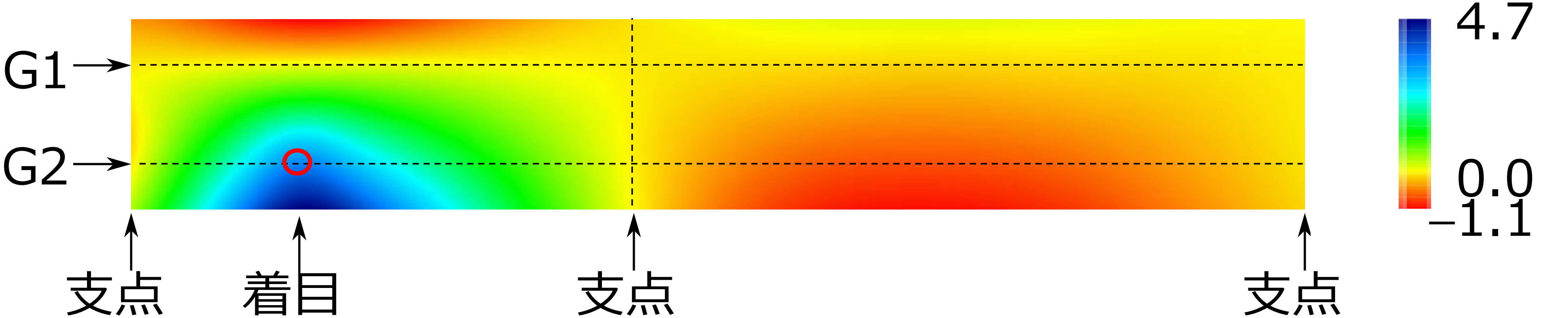
対象構造：





着目点と集中荷重
（下フランジを下から見た図）

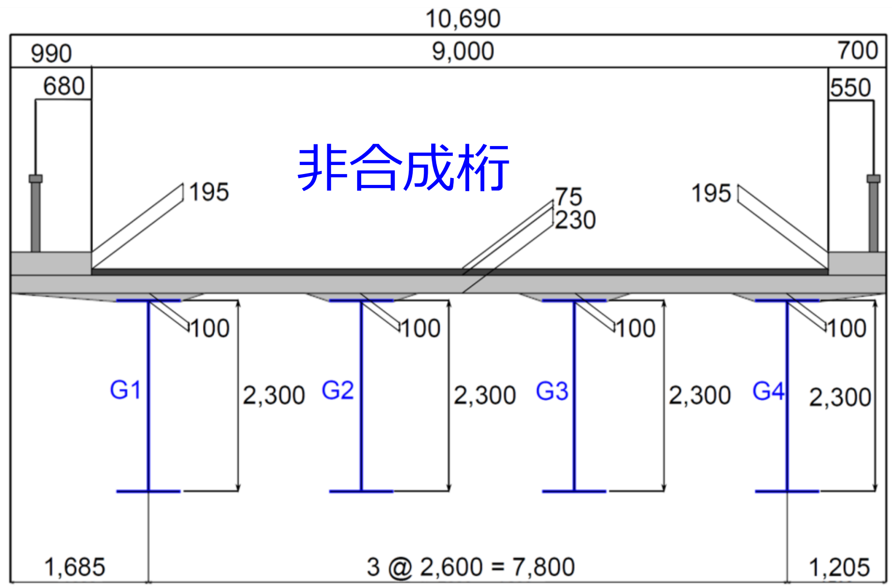
解析結果の鉛直方向変位コンター = 着目点の応力の影響線 $\times 10^{-5}\,\mathrm{mm}^{-2}$



- 単位荷重による応力との比較により妥当性を確認
- 単位荷重では節点数分（床版上面であれば約20万）の解析が必要
- 本手法では着目点1つにつき1度の解析のみ必要

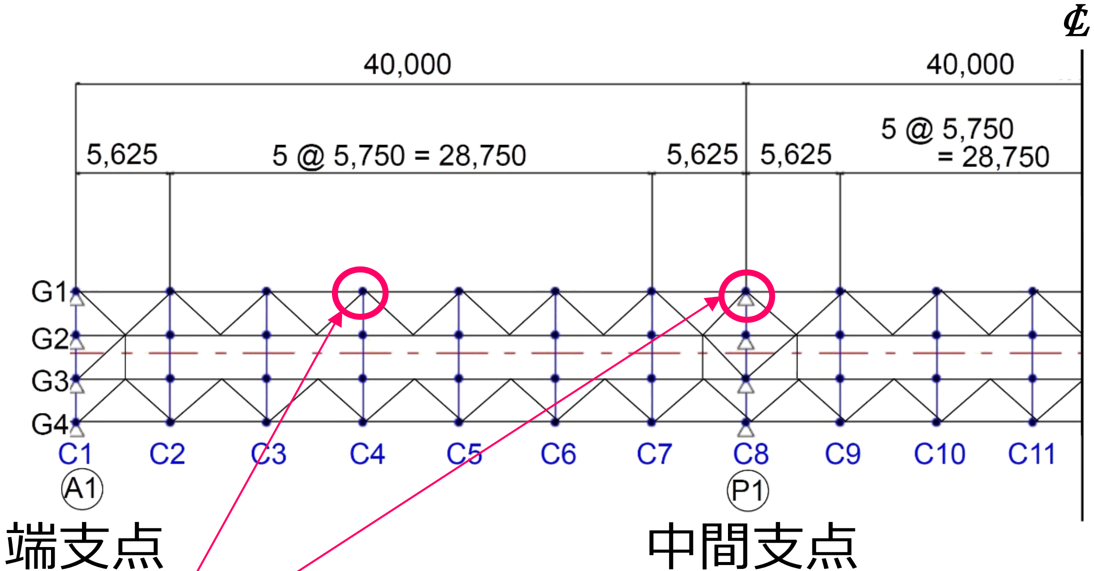
3次元問題の適用例

3径間連続4主鈑桁橋（40m×3径間）非合成桁と合成桁で検討



断面図

単位：mm



側面図

3径間連続4主鈑桁橋

各支間長　：40m

主桁高　　：2.3m

主桁間隔　：2.6m

着目点：

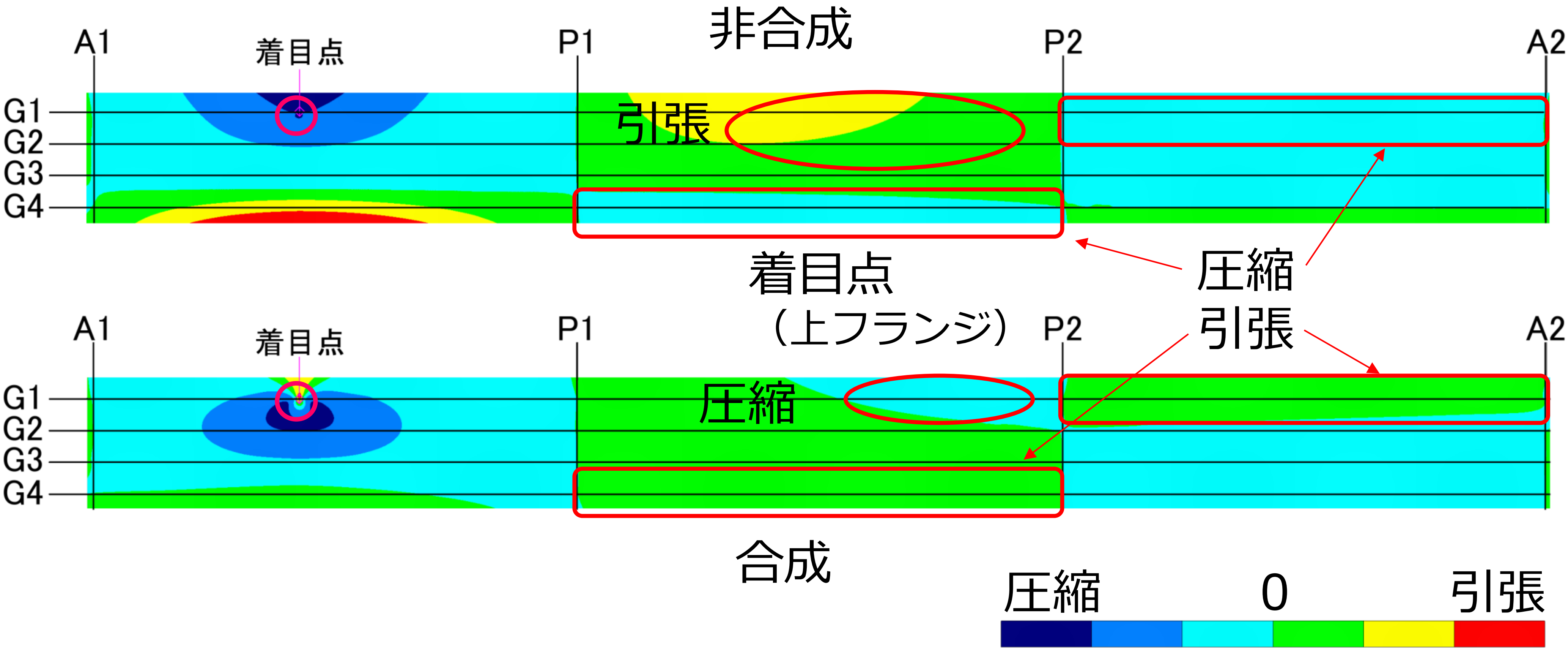
・G1桁のC4（支間中央）上フランジ

・G1桁のC8（中間支点）下フランジ

（最大の正・負曲げモーメント箇所近傍で圧縮応力が最大となる点）

正曲げ圧縮フランジ応力の影響線

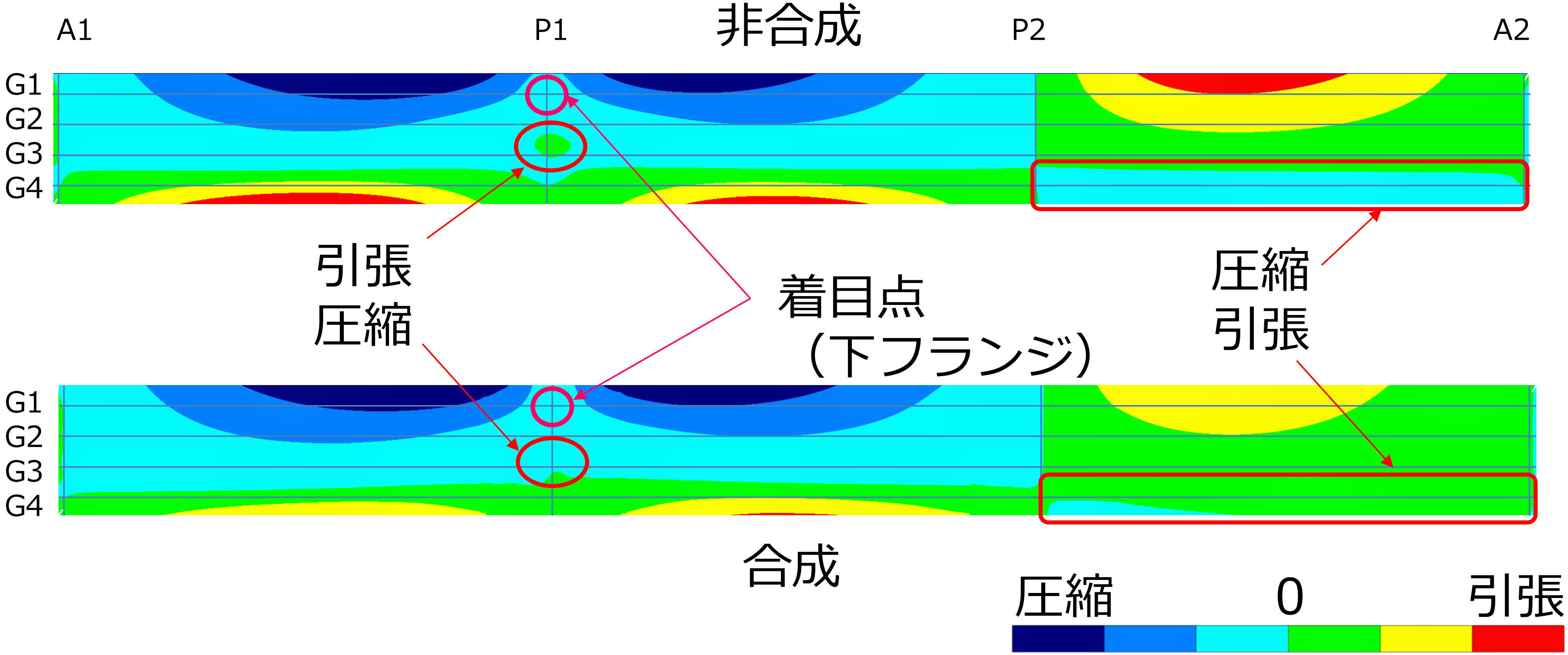
解析結果の鉛直方向変位コンター ＝ 着目点の応力の影響線



- それぞれ1度の解析で2次元的な影響線が取得可能
- 有限要素モデルにより，非合成桁と合成桁で荷重分配の違いが現れている

負曲げ圧縮フランジ応力の影響線

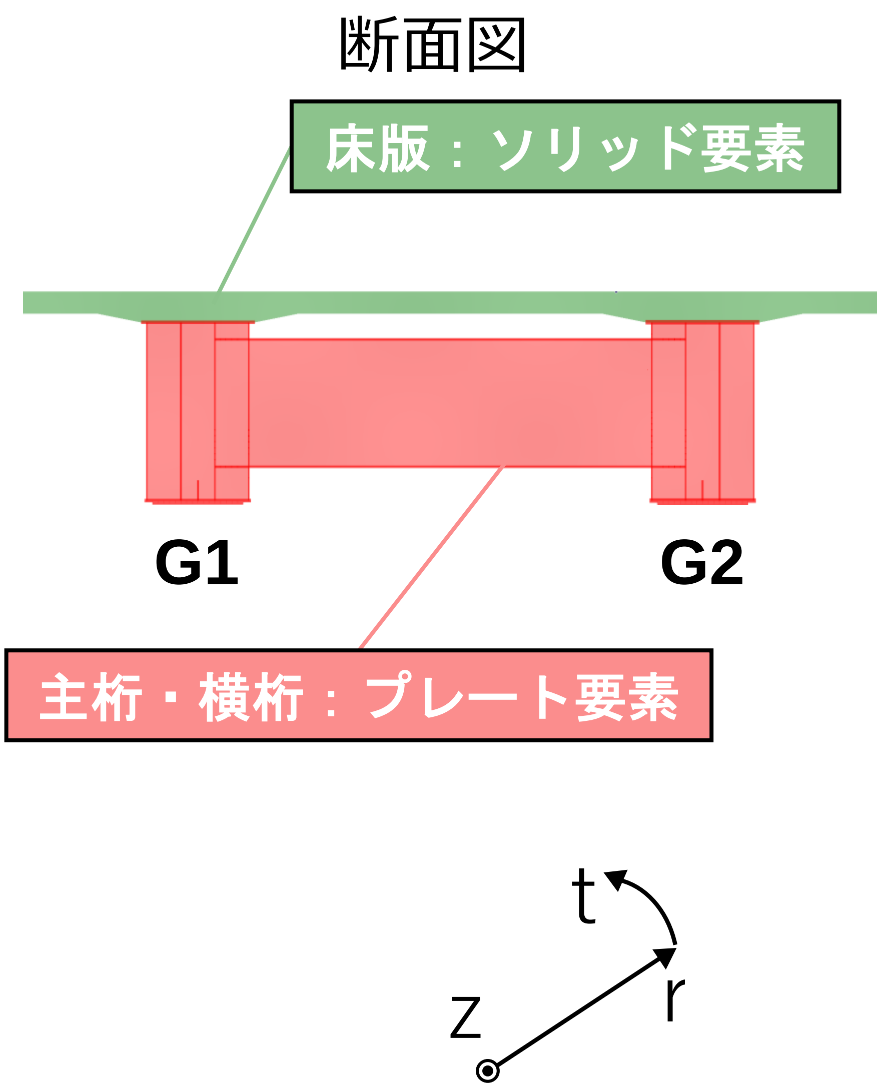
解析結果の鉛直方向変位コンター ＝ 着目点の応力の影響線

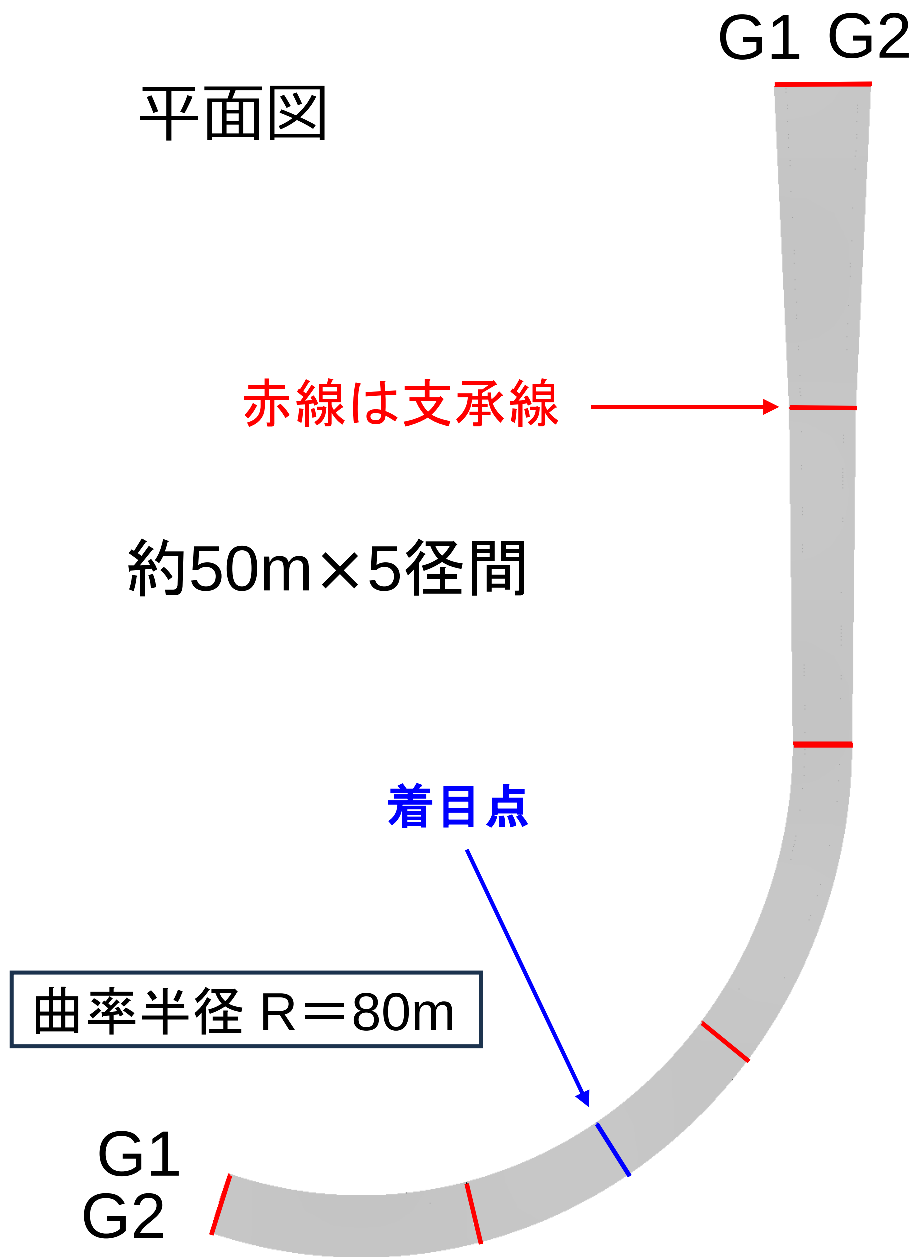


- それぞれ1度の解析で2次元的な影響線が取得可能
- 有限要素モデルにより，非合成桁と合成桁で荷重分配の違いが現れている
- 施工途中の構造系が複雑になる床版取替工における照査への活用

曲線箱桁橋の影響線

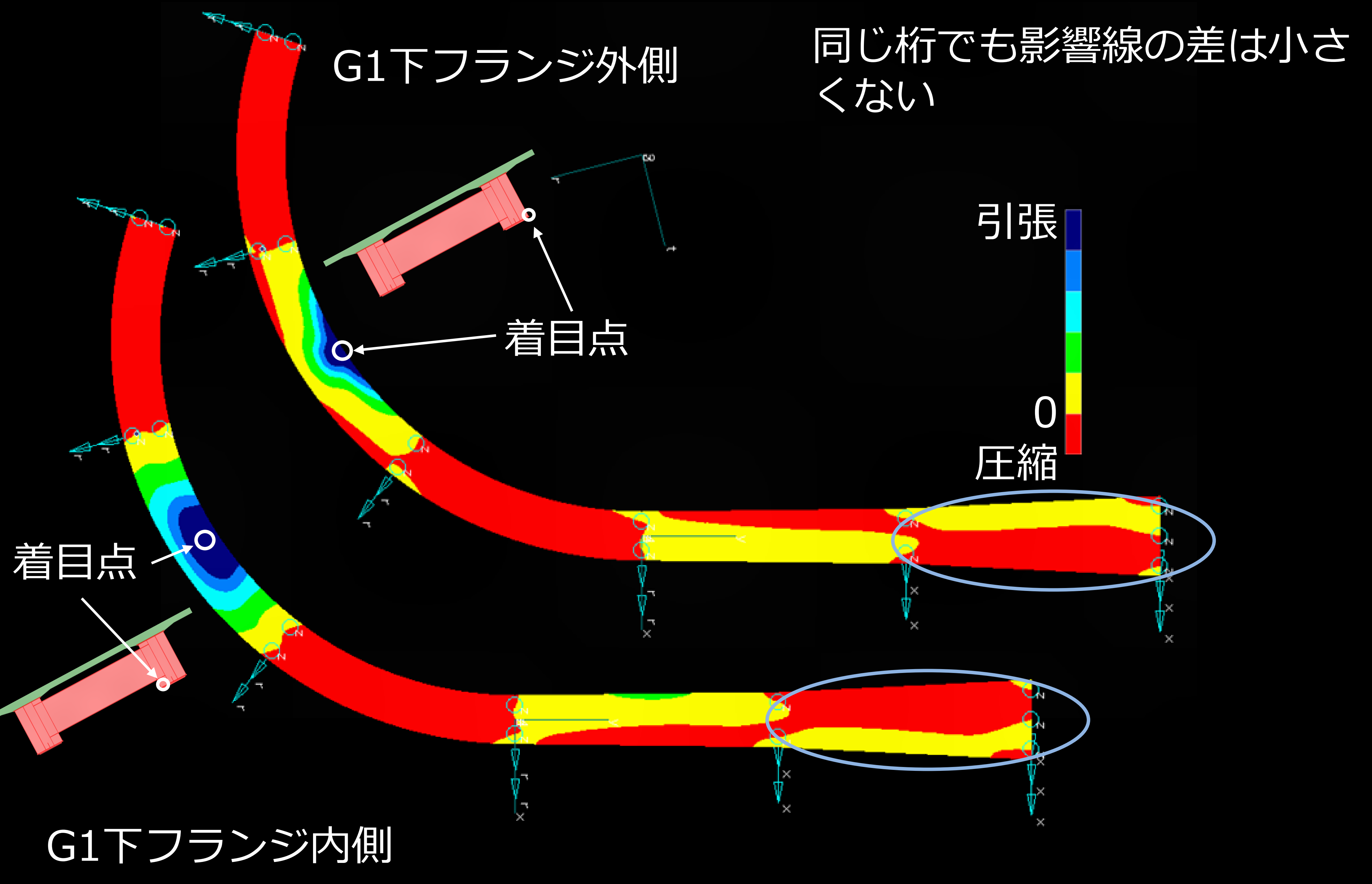
解析対象



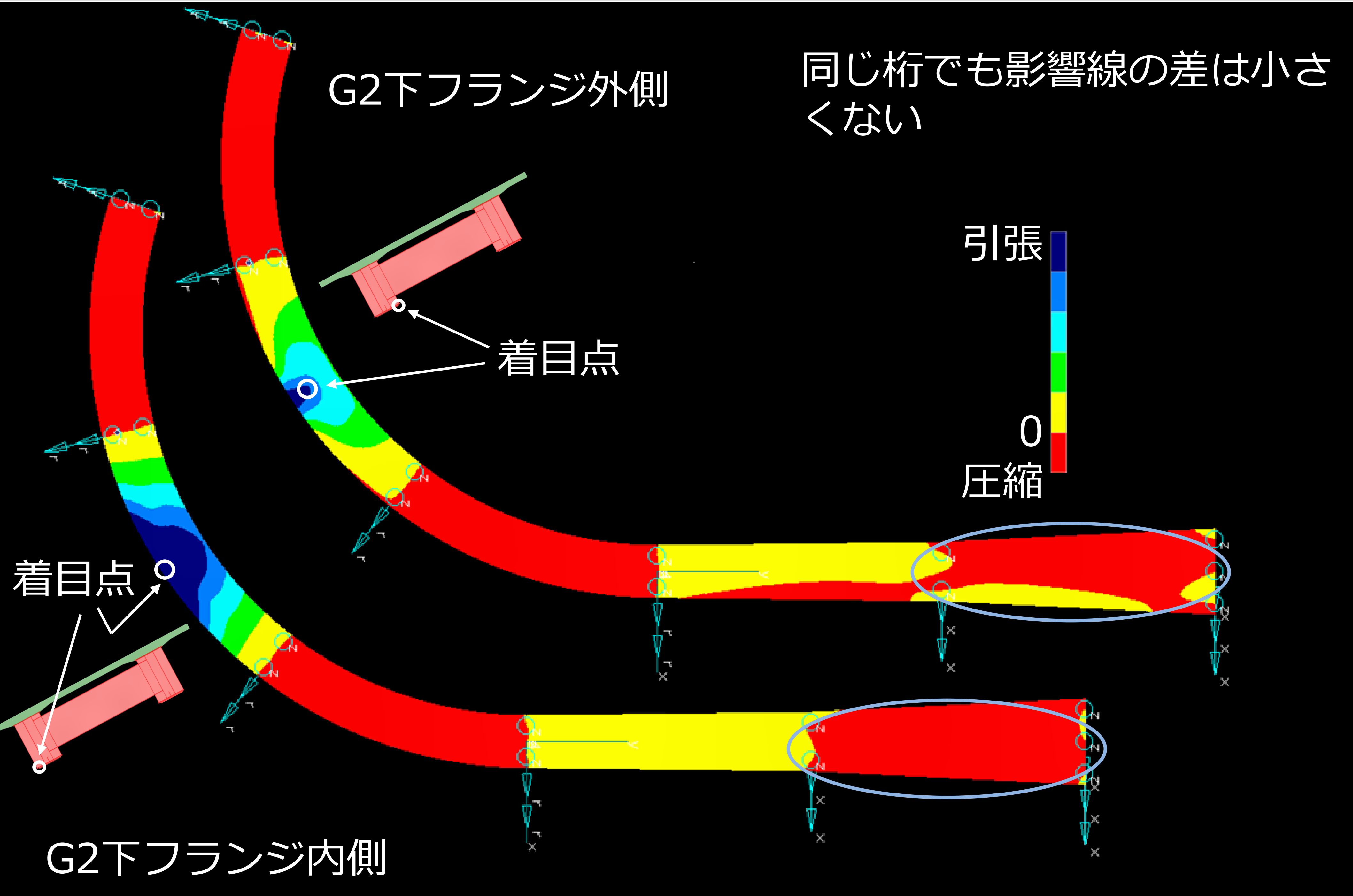


曲線箱桁橋の影響線（軸方向垂直応力）

同じ桁でも影響線の差は小さくない

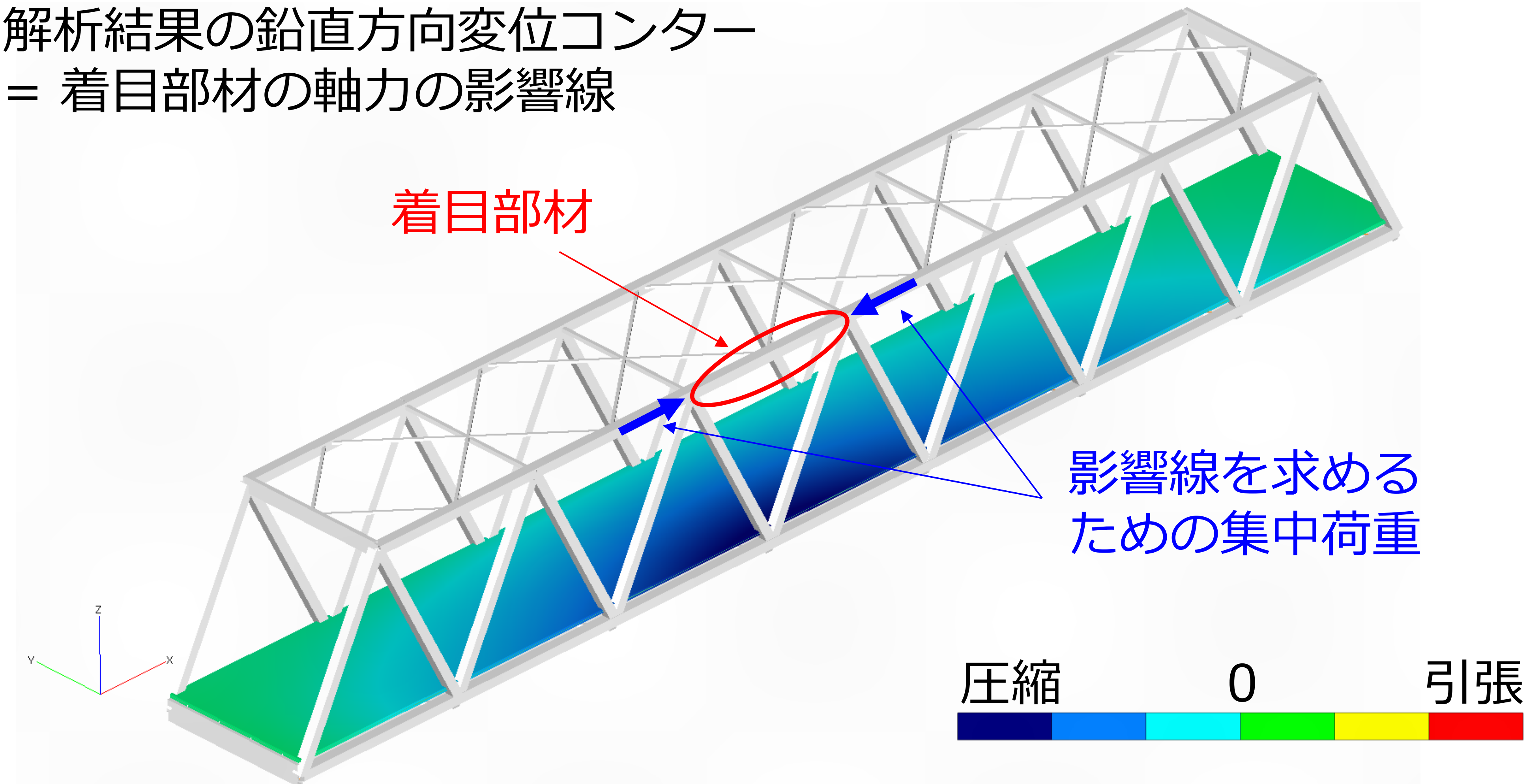


曲線箱桁橋の影響線（軸方向垂直応力）



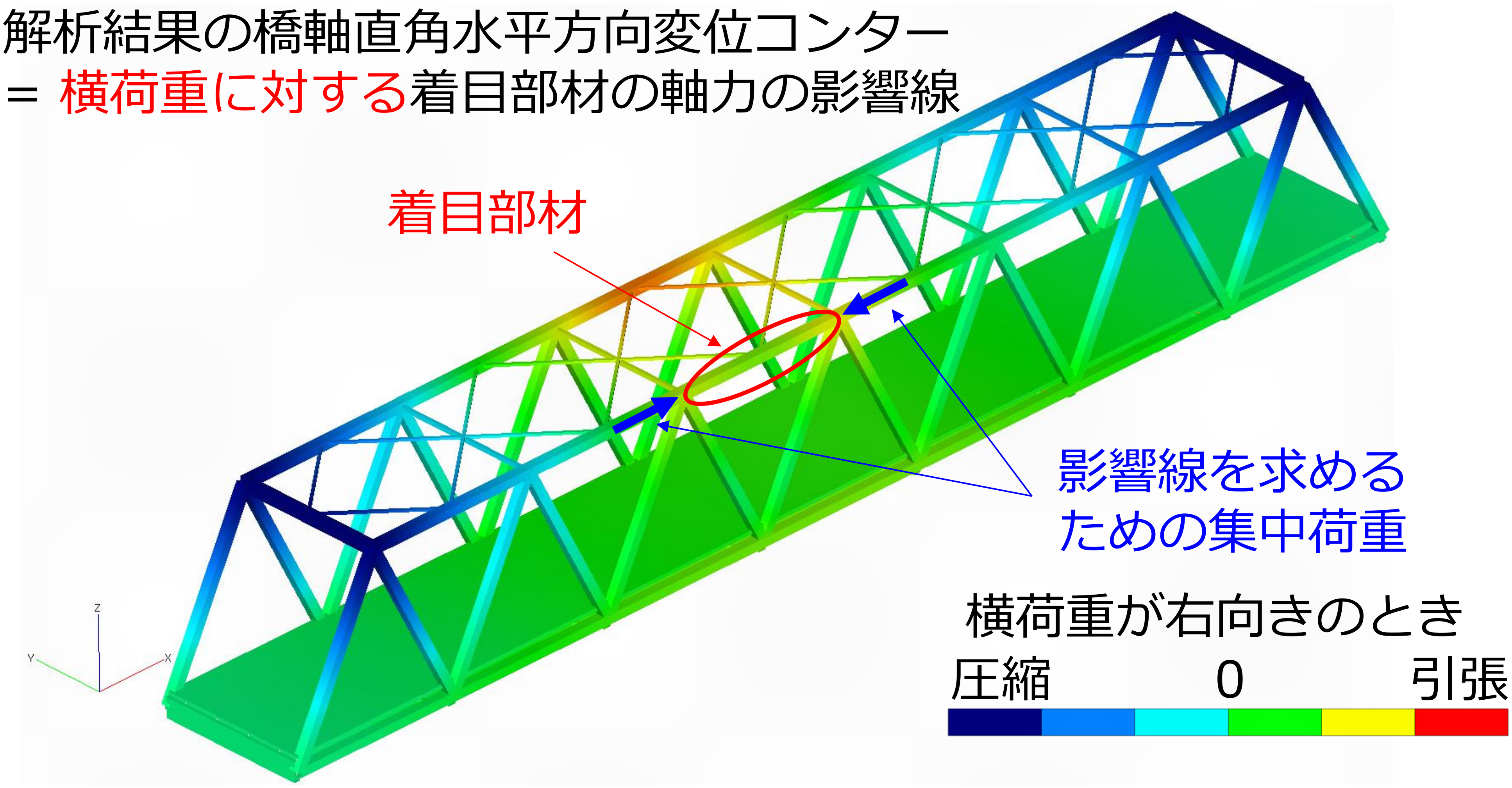
トラスの軸力の影響線

解析結果の鉛直方向変位コンター
= 着目部材の軸力の影響線



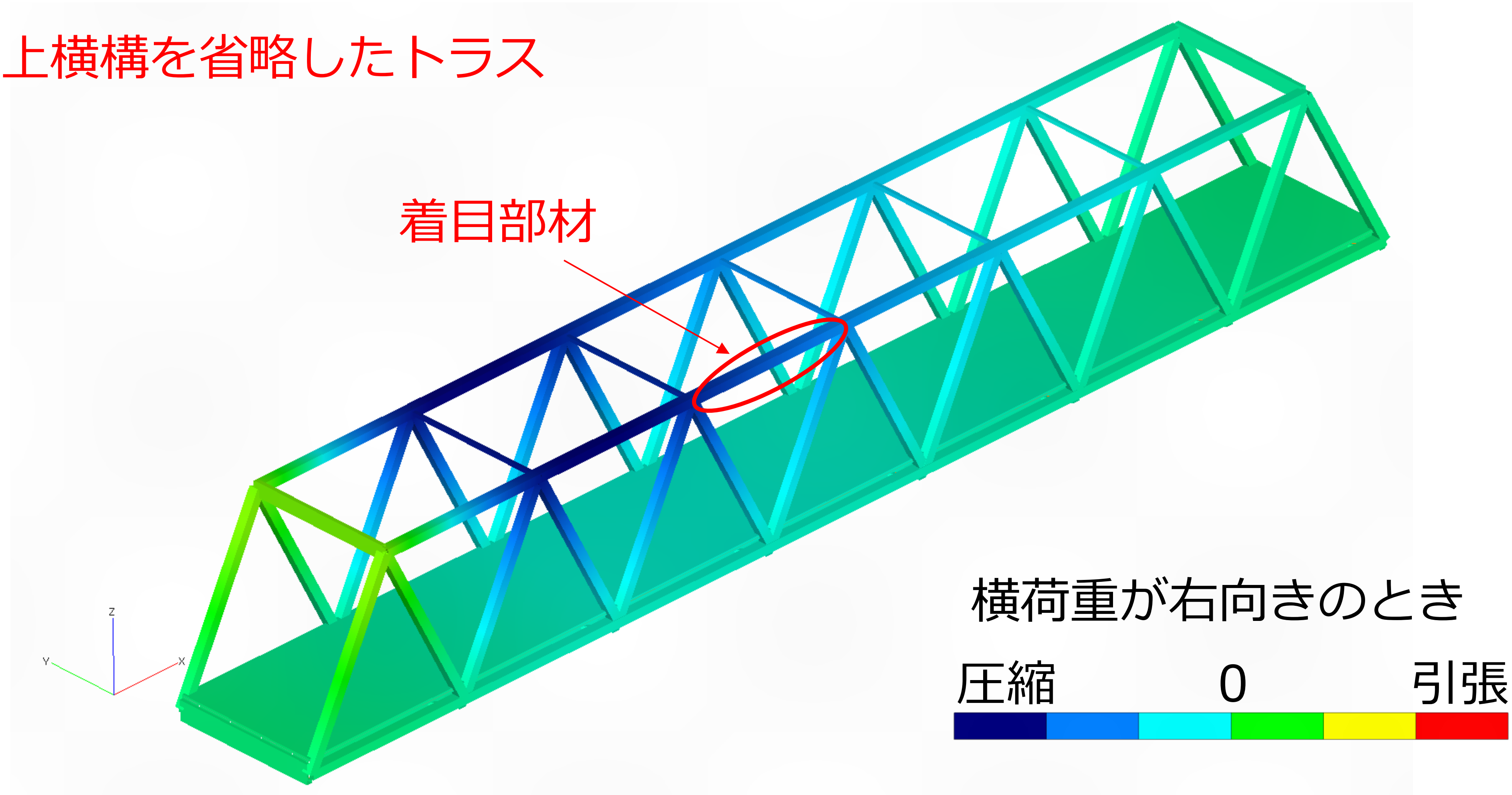
- 構造力学でおなじみ
- 2次元的な影響線が取得可能

トラスの軸力の横荷重に対する影響線



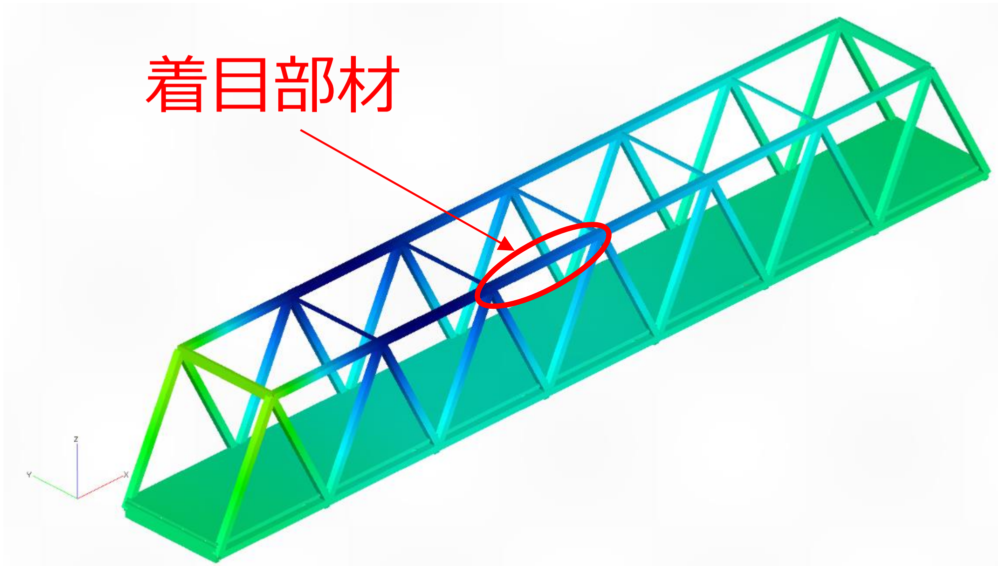
- 横荷重に対する軸力の影響線（通常は風荷重は一様に作用させる）
- 3次元的な影響線が取得可能

横荷重影響線に対する上横構の影響

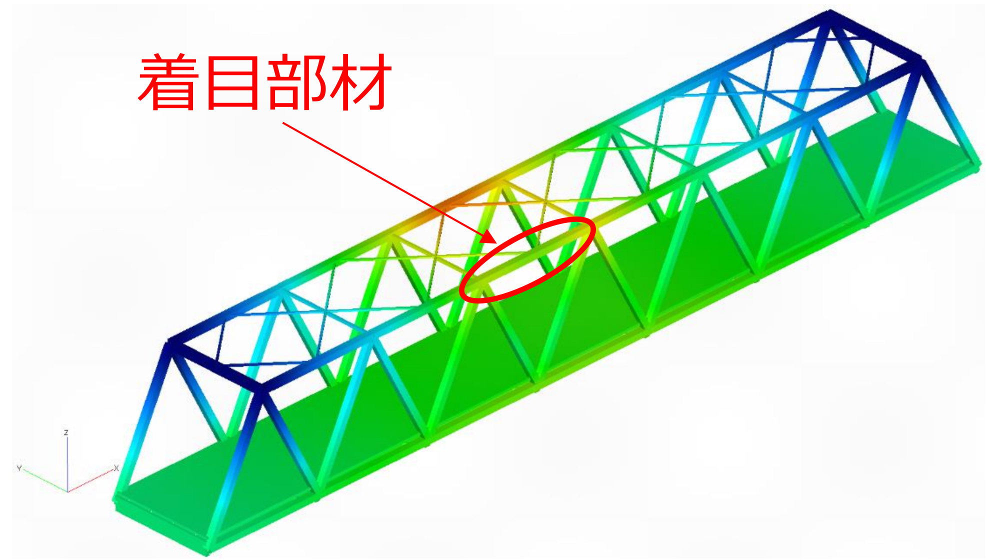


- 上横構の有無によって大きく異なる

上横構の有無による横荷重影響線の違い



上横構を省略したトラス



上横構のある通常のトラス

- 上横構の有無によって影響線が大きく異なる

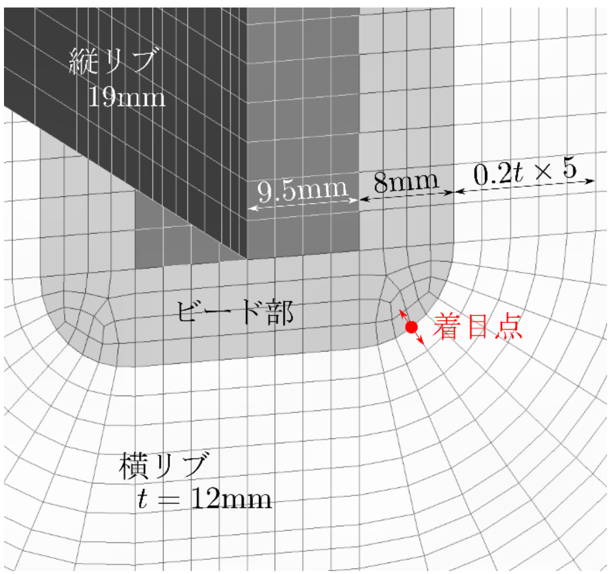
横荷重が右向きのとき

圧縮 0 引張

疲労寿命評価への適用

着目点

縦横リブ交差部の溶接止端



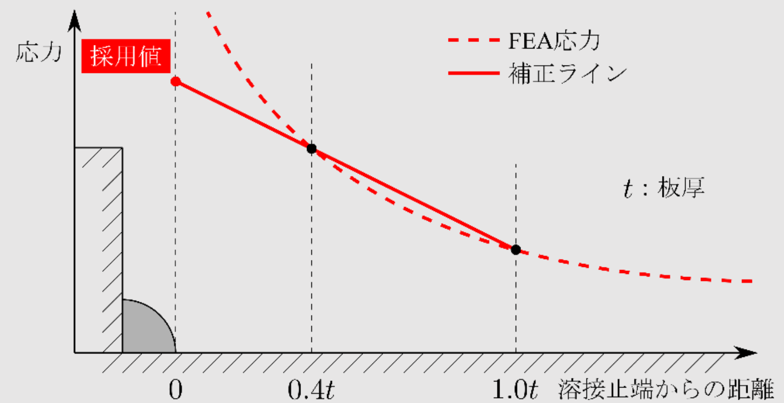
溶接止端直角方向の応力で評価

➤ 溶接止端の応力

構造ホットスポット応力[1)]

$$\sigma_h = 1.67\sigma_{0.4t} - 0.67\sigma_{1.0t}$$

ここに，$\sigma_{0.4t}$，$\sigma_{1.0t}$ は溶接止端から $0.4t, 1.0t$ 離れた位置の応力



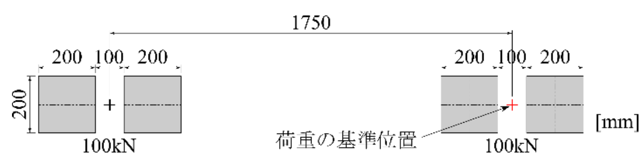
構造ホットスポット応力は応力の線形結合

⇒ **一度の解析で影響線を求めることができる**

1) 日本鋼構造協会：鋼構造物の疲労設計指針・同解説，技報堂出版，2012.

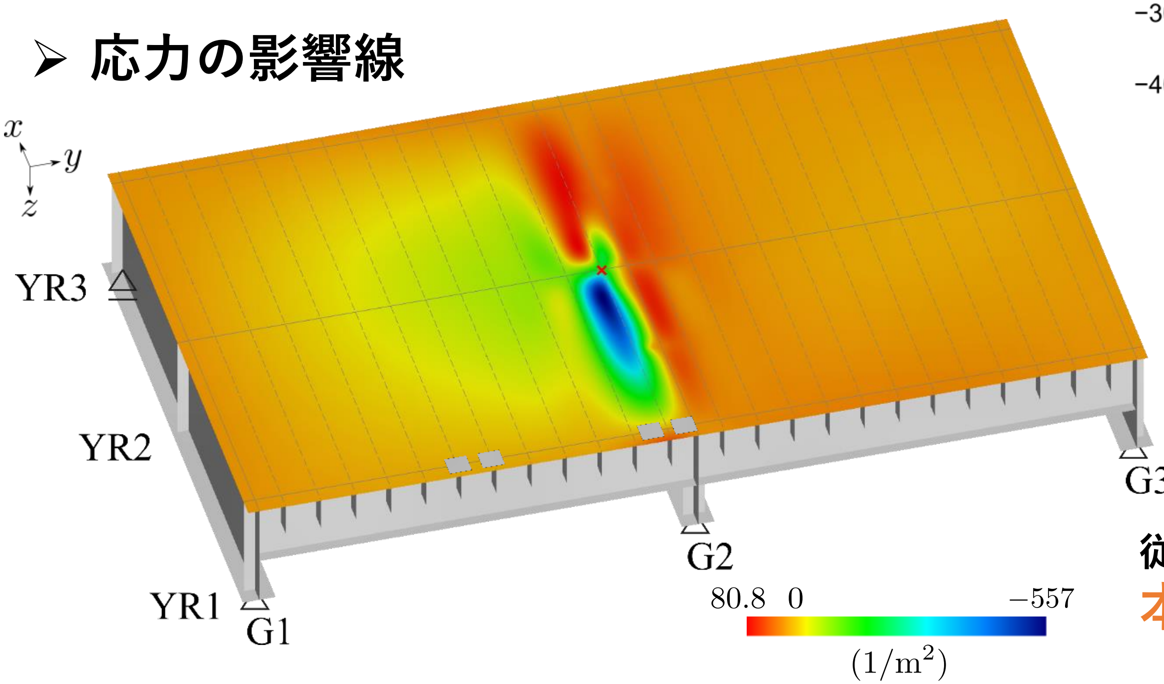
疲労寿命評価への適用

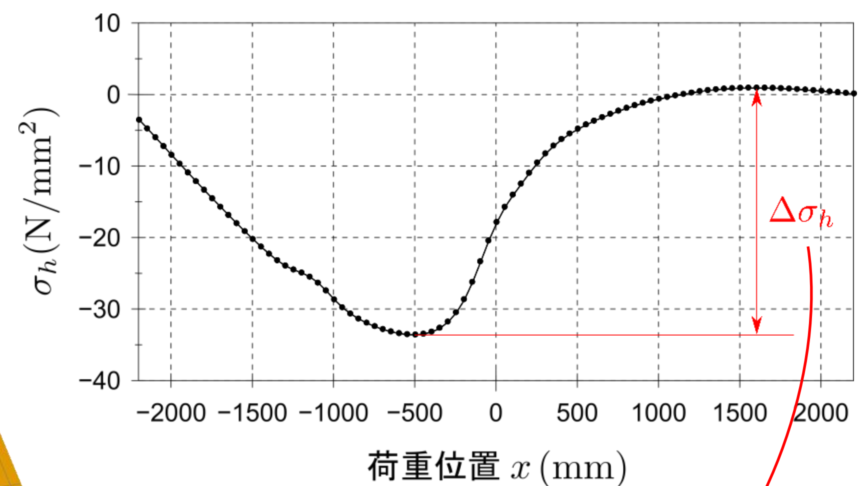
荷重モデル

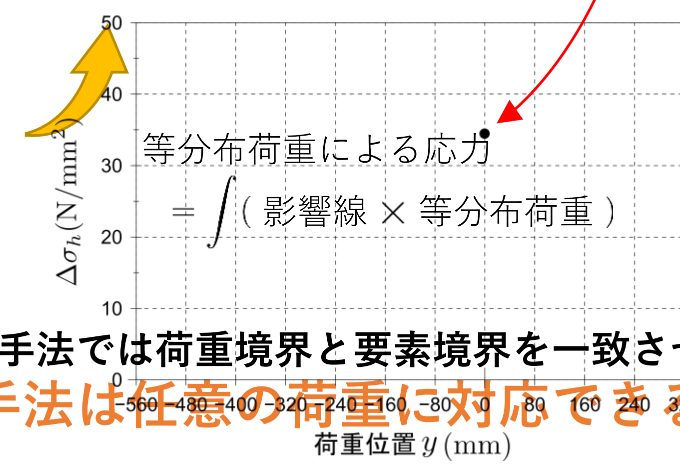


※道路橋示方書のT荷重を参考にした等分布荷重

- **応力の影響線**





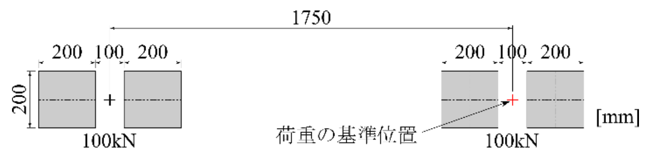


従来手法では荷重境界と要素境界を一致させる

本手法は任意の荷重に対応できる！

疲労寿命評価への適用

荷重モデル

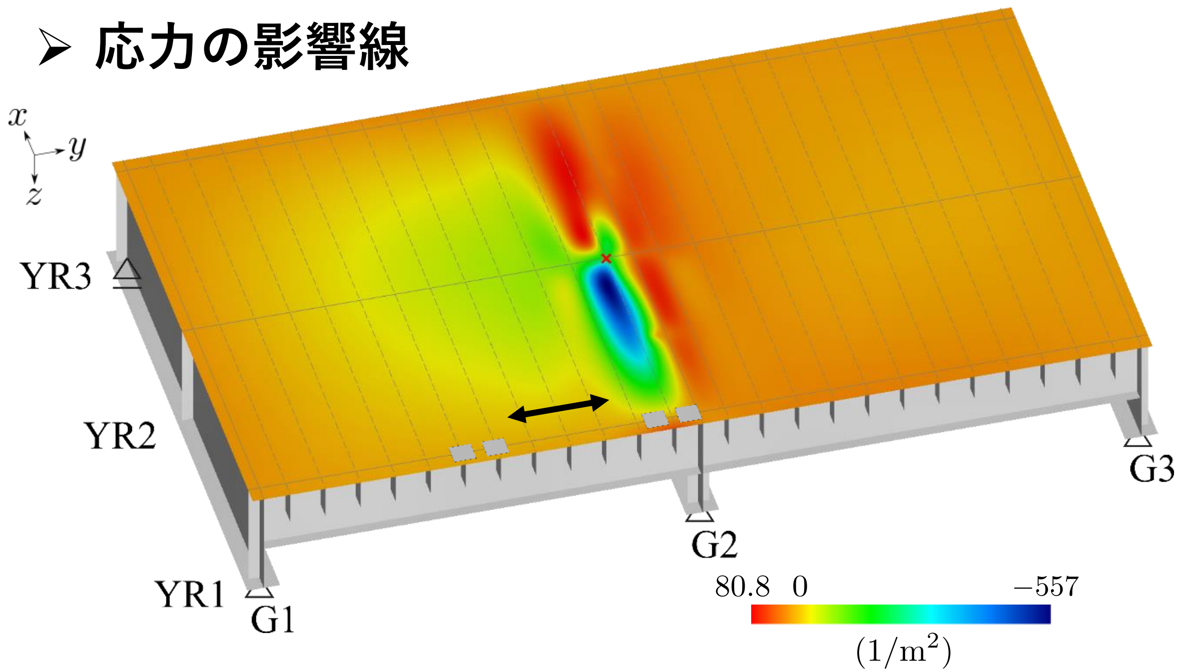


※道路橋示方書のT荷重を参考にした等分布荷重

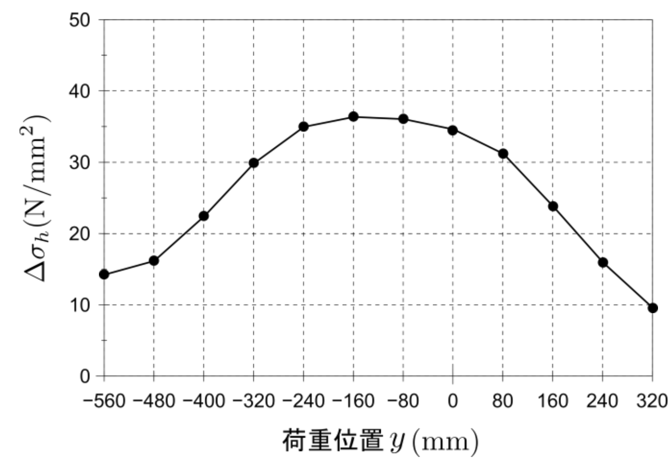
従来は1068ケースに対する解析が必要

本手法では一度の有限要素解析だけ！

➢ **応力の影響線**



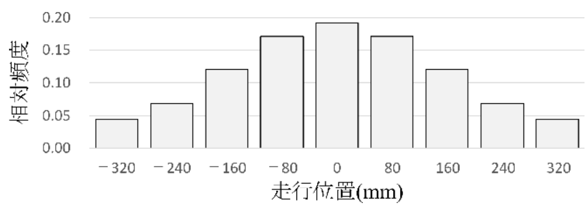
橋軸直角方向に同様の計算を行う！

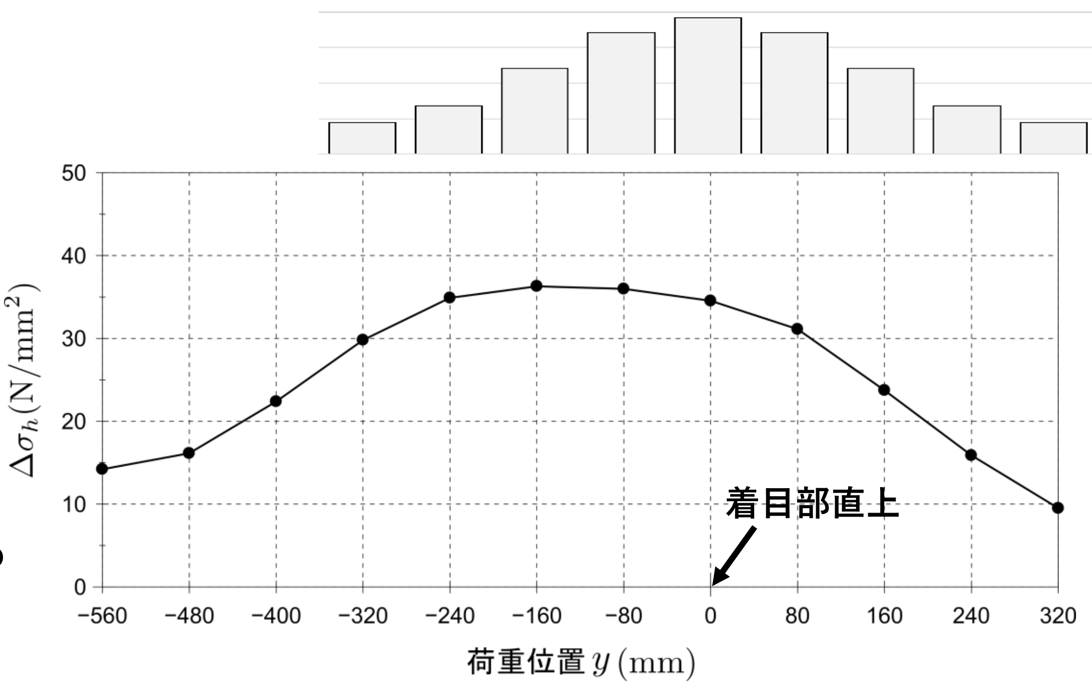


疲労寿命評価への適用

荷重走行位置分布

標準偏差165mmの正規分布に従う





本手法では構造系全体の影響線が得られる

荷重や走行位置の変更に対しても
容易に対応することができる！

マイナー則に従い，設計寿命100年の累積疲労損傷比を算出

走行位置の期待値(mm)	−240	−160	−80	0
累積疲労損傷比	0.194	0.222	0.223	0.197

まとめ

- 相反定理を有限要素離散化問題に適用し，有限要素モデルの影響線を1度の解析で求める方法を開発した.
- 骨組（格子）モデルでは評価できない現象に対しても設計で不可欠な影響線が使えるようになった.

⇨ 設計の効率化にお役立ていただきたい

関連する文献

- 斉木　功，三井涼平，ほか，　相反定理に基づく有限要素モデルの修正が不要な影響線の解析，土木学会論文集A1, Vol.78, No.3, pp.480-489, 2022.
- 斉木　功，三井涼平，ほか，モデルの修正が不要な影響線解析の平面シェル要素への適用，土木学会論文集, 投稿中.

DX時代の計算機援用構造力学 まとめ

- 代表体積要素の有限要素解析（数値構造試験）を援用した断面変形を許容する梁理論を提案した.

→ 必要な断面パラメタは断面図から計算可能

- 有限要素離散化問題に相反定理を適用し，有限要素モデルの影響線を1度の解析で取得できる方法を提案した.

→ 3次元モデルから有限要素モデルを生成し，影響線による設計（照査）が可能

謝辞：本研究の一部は JSPS 科研費15K14017，18K04318, 22K04278（いずれも代表：斉木 功）の助成および日本鉄鋼連盟鋼構造研究支援助成を受けたものです．また，エム・エムブリッジ株式会社（共同研究），構造強度学研究室OB・現役メンバーの協力に感謝します.